МГУ - ШКОЛЕ

М.К. Потапов   А.В. Шевкин

Дидактические материалы

10 класс

Базовый и профильный уровни

5-е издание

Москва
«Просвещение»
2011

УДК 372.8 : [512 + 517]
ББК 74.262.21
П64

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Потапов М. К.
П64 Алгебра и начала математического анализа. Дидактические материалы. 10 класс : базовый и профил. уровни / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. — 5-е изд. — М. : Просвещение, 2011. — 159 с. : ил. — (МГУ — школе). — ISBN 978-5-09-024884-6.

Сборник содержит самостоятельные и контрольные работы с итоговым тестом к учебнику «Алгебра и начала математического анализа, 10» С. М. Никольского и др. Дидактические материалы дополняют учебник более сложными заданиями, необходимыми для работы в классах с углубленным изучением математики. В книгу включены также материалы для подготовки к самостоятельным работам с примерами выполнения заданий, аналогичных заданиям из самостоятельных работ. Сборник можно использовать при работе по любому учебнику, а также для самообразования.

УДК 372.8 : [512 + 517]
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-024884-6

Предисловие

Дидактические материалы по курсу алгебры и начал математического анализа содержат 45 самостоятельных и 7 контрольных работ в четырех вариантах, а также тест для самоконтроля в двух вариантах. Ко всем вариантам контрольных работ и к тесту имеются ответы.

Содержание дидактических материалов полностью соответствует учебнику авторов С. М. Никольского и др. серии «МГУ — школе» для 10 класса и дополняет учебник более сложными заданиями, необходимыми для работы в классах, нацеленных на подготовку учащихся в вуз. Дидактические материалы можно использовать в классе и дома при работе по любым учебникам, а также для самообразования.

В разделе I книги даны примеры выполнения заданий, аналогичных заданиям из каждой самостоятельной работы. При этом образцы даны не для всех заданий и не повторяют задания самостоятельной работы, но работа с ними существенно повысит результативность выполнения самостоятельных работ и усвоение темы в целом.

Материалы для подготовки к самостоятельным работам содержат подробные объяснения решений заданий, так как имеют целью объяснение выбранных способов действий. А оформления решений учащимися могут быть краткими, в них, как правило, пропускают комментарии при выполнении равносильных преобразований уравнений или неравенств.

Темы, отмеченные в дидактических материалах звездочкой, не являются обязательными для изучения в общеобразовательном классе. Они охватывают программу углубленного изучения математики (профильных классов). Так как по учебникам серии «МГУ — школе» вопросы, связанные с неравносильными преобразованиями уравнений и неравенств, отнесены в 11 класс, то дидактические материалы для 10 класса, кроме рациональных и простейших показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений и неравенств, содержат задания на применение замены неизвестного, что позволяет решать достаточно сложные задачи, не применяя сложных общих методов решения (переход к уравнению-следствию и пр.).

Первые самостоятельные работы нацелены на повторение и систематизацию изученного в девятилетней школе. Предложенные работы могут использоваться как обучающие самостоятельные работы для классной или домашней работы. Любые из самостоятельных работ учитель может использовать для контроля на отметку. Но при этом следует учесть, что многие самостоятельные работы и все контрольные работы избыточны по объему. Поэтому предполагается, что учитель самостоятельно отберет из них часть заданий с учетом уровня подготовки учащихся по предмету и времени, отводимого на выполнение работы.

Следует учесть, что некоторые задания вариантов III и IV несколько сложнее соответствующих заданий вариантов I и II. Так как в классах с углубленным изучением математики контрольных работ должно быть больше, чем в классе, работающем по общеобразовательной программе, то отдельные самостоятельные работы, отмеченные звездочками, можно провести как контрольные работы.

РАЗДЕЛ I

Материалы для подготовки к самостоятельным работам

1. Действительные числа

Напомним правило перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную.

Для того чтобы записать периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной дроби, надо в числителе записать разность числа до второго периода и числа до первого периода, в знаменателе записать столько девяток, сколько цифр в периоде, и приписать к ним столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Пример 1. Запишем периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной: а) 2,1(45); б) 0,00(3); в) 0,(7).

Решение. а) Обозначим $x = 2{,}1(45) = 2{,}14545\ldots$, тогда 2145 — число до второго периода, 21 — число до первого периода, в периоде 2 цифры, между запятой и первым периодом 1 цифра. Поэтому по правилу имеем

$$x = \frac{2145 - 21}{990} = \frac{2124}{990} = \frac{118}{55}.$$

б) Обозначим $x = 0{,}00(3) = 0{,}00333\ldots$, тогда по правилу имеем $x = \frac{3-0}{900} = \frac{3}{900} = \frac{1}{300}$.

в) Обозначим $x = 0{,}(7) = 0{,}777\ldots$, тогда по правилу имеем $x = \frac{7-0}{9} = \frac{7}{9}$.

Ответ. а) $\frac{118}{55}$; б) $\frac{1}{300}$; в) $\frac{7}{9}$.

Пример 2. Найдем все действительные числа x, для каждого из которых справедливо равенство $|x+4| = 2$.

Решение. Модуль разности чисел x и -4 задает расстояние между точками x и -4. Изобразим на координатной оси точку -4 (рис. 1), тогда искомое число x, такое, что

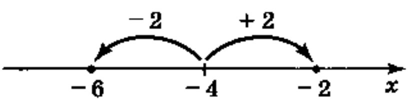

Рис. 1

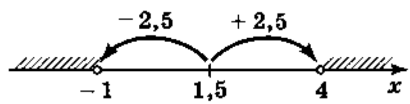

Рис. 2

$|x-(-4)|=2$, удалено от нее на 2 единицы, т. е. или $x=-6$, или $x=-2$.

Ответ. -6; -2.

Пример 3. Найдем все действительные числа x, для каждого из которых справедливо неравенство $|2x-3|>5$.

Решение. Данное неравенство перепишем в виде $|x-1{,}5|>2{,}5$. Модуль разности чисел x и 1,5 задает расстояние между точками x и 1,5. Изобразим на координатной оси точку 1,5 (рис. 2), тогда искомые числа x должны быть удалены от нее на расстояние, большее чем 2,5 единицы, т. е. или $x<-1$, или $x>4$.

Ответ. $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

2. Применение формул сокращенного умножения

Напомним формулы сокращенного умножения многочленов:

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2;$$
$$(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2;$$
$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3;$$
$$(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3;$$
$$(x-y)(x+y) = x^2-y^2;$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3;$$
$$(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3.$$

Пример 1. Вычислим значение многочлена $x^2+2xy+y^2$ при $x=-59{,}7$, $y=52{,}7$.

Решение. Так как $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$, то при $x= -59{,}7$, $y=52{,}7$

$$x^2+2xy+y^2=(-59{,}7+52{,}7)^2=(-7)^2=49.$$

Ответ. 49.

Пример 2. Из многочленов $A=3x^2+2x+5$ и $B=3x^2-3x+5$ составлено выражение $P=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$. Найдем значение выражения $P(x)$ при $x=0{,}2$.

Решение. $P(x)=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3=(A-B)^3= ((3x^2+2x+5)-(3x^2-3x+5))^3=(5x)^3=125x^3$.

Если $x=0{,}2$, то $P(0{,}2)=125\cdot(0{,}2)^3=125\cdot 0{,}008=1$.

Ответ. 1.

3. Квадратное уравнение. Формулы Виета

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ — квадратное уравнение,
$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант этого уравнения.

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; квадратный трехчлен раскладывается на линейные множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

2) Если $D = 0$, то уравнение имеет единственный корень $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ (говорят еще, что корни уравнения совпадают); квадратный трехчлен раскладывается на линейные множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

3) Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней, квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ нельзя разложить на линейные множители.

Пример 1. Решим квадратное уравнение

$$x^2 + 12x - 45 = 0.$$

Решение. $D = 12^2 - 4 \cdot (-45) = 144 + 180 = 324.$

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{-12 \pm 18}{2}; \quad x_1 = -15, \; x_2 = 3.$$

Ответ. -15; 3.

Теорема Виета. Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два действительных (различных или совпавших) корня x_1 и x_2, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.

Обратная теорема Виета. Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Формулы $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$ называют формулами Виета для приведенного квадратного уравнения.

Для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ формулы Виета имеют вид $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Пример 2. Решим квадратное уравнение

$$x^2 - 2005x + 2004 = 0.$$

Решение. Заметим, что число 1 является корнем данного квадратного уравнения, так как $1^2 - 2005 \cdot 1 + 2004 = 0$. Второй корень найдем, пользуясь формулами Виета.

Так как $x_1 x_2 = 2004$ и $x_1 = 1$, то $x_2 = 2004$.

Ответ. 1; 2004.

Пример 3. Если квадратное уравнение $x^2 - 13x + 2 = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то, не вычисляя их, найдем значение числового выражения $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$.

Решение. Так как $D = 13^2 - 4 \cdot 2 > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня x_1 и x_2. Применяя формулы Виета, получим $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1x_2 \cdot (x_1 + x_2) = 2 \cdot 13 = 26$.

Ответ. 26.

4. Алгебраические дроби

Пример 1. а) Сократим дробь $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$.

б) Найдем значение полученной после сокращения дроби при $x = 1$.

Решение. а) При $x = 1$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Это означает, что их разложение на множители содержит множитель $(x - 1)$.

Разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = x^3 - x^2 - x^2 + x - 6x + 6 =$$
$$= x^2(x - 1) - x(x - 1) - 6(x - 1) = (x - 1)(x^2 - x - 6) =$$
$$= (x - 1)(x - 3)(x + 2);$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 =$$
$$= x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 6(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) =$$
$$= (x - 1)(x - 3)(x - 2).$$

Теперь сократим дробь:

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \frac{(x - 1)(x - 3)(x + 2)}{(x - 1)(x - 3)(x - 2)} = \frac{x + 2}{x - 2}.$$

б) Если $x = 1$, то $\dfrac{x + 2}{x - 2} = -3$.

Ответ. а) $\dfrac{x + 2}{x - 2}$; б) -3.

Пример 2. а) Запишем в виде дроби выражение

$$\frac{1}{(x - 1)x} + \frac{1}{x(x + 1)} + \frac{1}{(x + 1)(x + 2)}.$$

б) Найдем значение полученной дроби при $x = 0$.

Решение. а) Представим каждую из данных дробей в виде разности и упростим полученную сумму:

$$\frac{1}{(x-1)x}+\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-$$
$$-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}=\frac{3}{(x-1)(x+2)}.$$

б) Если $x=0$, то $\frac{3}{(x-1)(x+2)}=-1{,}5$.

Ответ. а) $\frac{3}{(x-1)(x+2)}$; б) $-1{,}5$.

5. Рациональные уравнения

Пример 1. Решим уравнение $\frac{x^2-4}{x^3-x^2-4}=0$.

Решение. Найдем значения x, при которых числитель дроби равен нулю:

$$x^2-4=0, \quad x_1=2,\ x_2=-2.$$

При $x_1=2$ знаменатель дроби обращается в нуль: $2^3-2^2-4=0$, а при $x_2=-2$ нет, следовательно, -2 — единственный корень данного уравнения.

Ответ. -2.

Пример 2. Решим уравнение $\frac{2x+2}{x+3}+\frac{7x-11}{(x+3)(x-5)}=1$.

Решение. Перенесем все члены уравнения в левую часть и после приведения дробей к общему знаменателю перепишем уравнение в виде

$$\frac{x^2+x-6}{(x+3)(x-5)}=0. \qquad (1)$$

Найдем значения x, при которых числитель дроби в уравнении (1) равен нулю:

$$x^2+x-6=0, \quad x_1=-3,\ x_2=2.$$

При $x_1=-3$ знаменатель $(x+3)(x-5)$ дроби в уравнении (1) обращается в нуль, а при $x_2=2$ нет, следовательно, 2 — единственный корень данного уравнения.

Ответ. 2.

6*. Замена неизвестного при решении рациональных уравнений

Пример 1. Решим уравнение

$$(13x+29)^2-19(13x+29)+48=0. \qquad (1)$$

Решение. Обозначив $t=13x+29$, перепишем уравнение (1) в виде

$$t^2-19t+48=0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет два корня $t_1=3$ и $t_2=16$, поэтому все корни уравнения (1) являются корнями двух уравнений:

1) $13x+29=3$, $13x=-26$, $x_1=-2$; и 2) $13x+29=16$, $13x=-13$, $x_2=-1$.

Ответ. -2; -1.

Пример 2. Решим уравнение

$$(x^2+6x)^2+2(x+3)^2=81. \qquad (3)$$

Решение. Перепишем уравнение (3) в виде

$$(x^2+6x)^2+2(x^2+6x)-63=0. \qquad (4)$$

Обозначив $t=x^2+6x$, перепишем уравнение (4) в виде

$$t^2+2t-63=0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) имеет два корня $t_1=-9$ и $t_2=7$, поэтому все корни уравнения (3) являются корнями двух уравнений:

1) $x^2+6x=-9$, $x^2+6x+9=0$, $x_1=-3$; и 2) $x^2+6x=7$, $x^2+6x-7=0$, $x_2=1$, $x_3=-7$.

Ответ. -7; -3; 1.

Пример 3. Решим уравнение

$$\frac{x^2-3x-2}{x^2+x-4}+4\cdot\frac{x^2+x-4}{x^2-3x-2}+4=0. \qquad (6)$$

Решение. Обозначив $t=\dfrac{x^2-3x-2}{x^2+x-4}$, перепишем уравнение (6) в виде

$$t+\frac{4}{t}+4=0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) имеет единственный корень $t_0=-2$, поэтому все корни уравнения (6) являются корнями уравнения $\frac{x^2-3x-2}{x^2+x-4}=-2$, которое имеет два корня $x_1=-\frac{5}{3}$ и $x_2=2$. Следовательно, и уравнение (6) имеет только два корня x_1 и x_2.

Ответ. $-\frac{5}{3}$; 2.

7*. Доказательство числовых неравенств

Пример 1. Докажем, что для любого действительного числа x справедливо неравенство $x^4-4x^2+5>0$.

Доказательство. Выделим полный квадрат:

$$x^4-4x^2+5=x^4-4x^2+4+1=(x^2-2)^2+1.$$

Так как $(x^2-2)^2 \geqslant 0$ для любого действительного числа x, а $1>0$, то $(x^2-2)^2+1>0$, т. е. $x^4-4x^2+5>0$ для любого действительного числа x, что и требовалось доказать.

Пример 2. Докажем, что для любого действительного числа x справедливо неравенство $x^2-5x+\frac{1}{x^2-5x+7}\geqslant -5$.

Доказательство. Прибавив к обеим частям неравенства число 7, получим неравенство

$$x^2-5x+7+\frac{1}{x^2-5x+7}\geqslant 2. \qquad (1)$$

Для доказательства исходного неравенства достаточно доказать справедливость неравенства (1). Так как дискриминант квадратного трехчлена $A=x^2-5x+7$ отрицательный и коэффициент при x^2 положительный, то $A>0$ для любого действительного числа x. Но для любого положительного A справедливо неравенство $A+\frac{1}{A}\geqslant 2$, поэтому справедливо неравенство (1), что и требовалось доказать.

Пример 3. Докажем справедливость неравенства

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

Доказательство. Обозначим $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}$; $B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}$. Так как $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$, ...,

$\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$, то $A < B$. Так как $A > 0$, то $A^2 < AB$. Так как $AB=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot 99\cdot 100}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot 100\cdot 101}=\frac{1}{101}<\frac{1}{100}=\left(\frac{1}{10}\right)^2$, то $A^2<\left(\frac{1}{10}\right)^2$. Отсюда, учитывая, что $A > 0$, получаем $A < \frac{1}{10}$, что и требовалось доказать.

8*. Метод математической индукции

Пример 1. Докажем методом математической индукции, что $3^{2n-1}+5^{n+1}$ делится на 4 для любого натурального числа n.

Доказательство. Обозначим $A(n)=3^{2n-1}+5^{n+1}$.

1) $A(1)=3+25=28$ — делится на 4.

2) Предположим, что $A(k)=3^{2k-1}+5^{k+1}$ делится на 4, и докажем, что $A(k+1)$ делится на 4.

$$A(k+1)=3^{2k+1}+5^{k+2}=3^{2k-1+2}+5^{k+1+1}=$$
$$=9\cdot 3^{2k-1}+5\cdot 5^{k+1}=4\cdot 3^{2k-1}+5\cdot A(k).$$

Так как, по нашему предположению, $A(k)$ делится на 4, то $5\cdot A(k)$ делится на 4. Слагаемое $4\cdot 3^{2k-1}$ тоже делится на 4, поэтому и сумма, равная $A(k+1)$, делится на 4.

Согласно принципу математической индукции это означает, что выражение $A(n)$ делится на 4 для любого натурального числа n, что и требовалось доказать.

Пример 2. Докажем методом математической индукции, что для любого натурального числа n справедливо равенство

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

Доказательство. Обозначим

$$A(n)=\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)};\quad B(n)=\frac{n}{4n+1}.$$

1) Равенство $A(1)=B(1)$ верно, так как $\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{4+1}$.

2) $$A(k+1)-A(k)=\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+$$
$$+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}-\left(\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}\right)=$$
$$=\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}.$$

$$B(k+1)-B(k)=\frac{k+1}{4k+5}-\frac{k}{4k+1}=\frac{(k+1)(4k+1)-k(4k+5)}{(4k+1)(4k+5)}=$$
$$=\frac{4k^2+5k+1-4k^2-5k}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}.$$

Следовательно, $A(k+1)-A(k)=B(k+1)-B(k)$, поэтому верно равенство $A(k+1)-B(k+1)=A(k)-B(k)$.

3) Предположим, что $A(k)=B(k)$, тогда из справедливости последнего равенства следует, что справедливо равенство $A(k+1)=B(k+1)$.

Согласно принципу математической индукции это означает, что равенство $A(n)=B(n)$ верно для любого натурального числа n, что и требовалось доказать.

9. Перестановки, размещения, сочетания

Пример 1. Сколько мелодий можно сыграть из четырех различных нот?

Решение. Число способов равно $P_4=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$. В самом деле, первую ноту можно выбрать из четырех нот четырьмя способами, вторую — из оставшихся трех тремя способами, третью ноту можно выбрать из двух двумя способами, четвертую ноту можно выбрать из одной одним способом, а все четыре ноты можно выбрать $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ способами, т. е. из четырех различных нот можно сыграть 24 мелодии.

Ответ. 24.

Пример 2. Сколько мелодий можно сыграть из четырех нот, выбранных без повторения из семи заданных различных нот?

Решение. Число способов равно $A_7^4=7\cdot6\cdot5\cdot4=840$. В самом деле, первую ноту можно выбрать из семи семью способами, вторую — из оставшихся шести шестью способами, третью ноту можно выбрать из оставшихся пяти пятью способами, четвертую ноту — четырьмя способами, а все четыре ноты можно выбрать $7\cdot6\cdot5\cdot4=840$ способами.

Ответ. 840.

Пример 3. Сколько можно сыграть аккордов из четырех нот, выбранных из семи заданных различных нот?

Решение. Число способов равно $C_7^4=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=35.$

В самом деле, используя четыре различные ноты, можно сыграть A_7^4 мелодий. Так как в аккорде четыре выбранные ноты звучат одновременно (т. е. порядок выбранных нот не играет роли), то искомое число аккордов меньше числа мелодий в P_4 раз. Тогда искомое число аккордов равно $\frac{A_7^4}{P_4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$. Это и есть число $C_7^4 = 35$.

Ответ. 35.

Пример 4. Сколькими способами можно из четырех офицеров и шести солдат составить два патруля из двух офицеров и трех солдат?

Решение. Для решения задачи достаточно определить число способов составления одного патруля, так как оставшиеся офицеры и солдаты составят второй патруль. Искомое число способов равно произведению числа способов выбрать двух офицеров из четырех (C_4^2) и числа способов выбрать трех солдат из шести (C_6^3) (оба раза берем число сочетаний, а не число размещений, так как порядок в выбранной группе офицеров или солдат не играет роли). Искомое число способов равно $C_4^2 \cdot C_6^3 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$.

Ответ. 120.

10. Формула бинома Ньютона

Пример 1. Вычислим коэффициент при a^7 в разложении выражения $\left(a - \frac{1}{a}\right)^{13}$ по формуле бинома Ньютона.

Решение. Так как $\left(a - \frac{1}{a}\right)^{13} = \left(a + \frac{1}{-a}\right)^{13} = C_{13}^0 a^{13} + C_{13}^1 \frac{a^{12}}{(-a)^1} +$

$$+ C_{13}^2 \frac{a^{11}}{(-a)^2} + C_{13}^3 \frac{a^{10}}{(-a)^3} + \ldots = C_{13}^0 a^{13} - C_{13}^1 a^{11} + C_{13}^2 a^9 - C_{13}^3 a^7 + \ldots,$$

то искомый коэффициент есть $-C_{13}^3 = -\frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -286$.

Ответ. −286.

Пример 2. Вычислим сумму коэффициентов

$$C_{13}^0 + C_{13}^1 + C_{13}^2 + C_{13}^3 + \ldots + C_{13}^{13}.$$

Решение. Рассмотрим разложение степени двучлена по формуле бинома Ньютона:

$$(a + x)^{13} = C_{13}^0 a^{13} + C_{13}^1 a^{12} x^1 + C_{13}^2 a^{11} x^2 + \ldots + C_{13}^{13} x^{13}.$$

Подставив в полученное равенство $a = 1$, $x = 1$, получим искомую сумму: $C_{13}^0 + C_{13}^1 + C_{13}^2 + \ldots + C_{13}^{13} = (1+1)^{13} = 2^{13} = 8192$.

Ответ. 8192.

11*. Деление многочленов. Корень многочлена

Пример. Решим уравнение $9x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = 0$.

Решение. У многочлена $P_4(x) = 9x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1$ коэффициент $a_4 = 9$, а свободный член $a_0 = 1$. Если уравнение имеет корень — рациональное число, то этот корень надо искать среди чисел $1, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{9}$.

Вычислим

$P_4(1) = 9 - 3 + 4 + 5 + 1 = 16 \neq 0$; $P_4(-1) = 9 + 3 + 4 - 5 + 1 = 12 \neq 0$;

$P_4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{5}{3} + 1 \neq 0$; $P_4\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} - \frac{5}{3} + 1 = 0$.

Таким образом, многочлен $P_4(x)$ имеет корень $-\frac{1}{3}$, поэтому $P_4(x)$ делится на двучлен $\left(x + \frac{1}{3}\right)$, т. е.

$$P_4(x) = P_3(x) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right).$$

Применяя схему Горнера, найдем коэффициенты многочлена $P_3(x)$:

	9	−3	4	5	1
$-\frac{1}{3}$	9	−6	6	3	0

Итак, $P_3(x) = 9x^3 - 6x^2 + 6x + 3$, следовательно, его рациональные корни надо искать среди чисел $1, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$. Ясно, что числа $1, -1, \frac{1}{3}$ не могут быть корнями многочлена $P_3(x)$. Проверим число $-\frac{1}{3}$.

Так как $P_3\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 2 + 3 = 0$, то многочлен $P_3(x)$ имеет корень $-\frac{1}{3}$. Поэтому многочлен $P_3(x)$ делится на двучлен $\left(x + \frac{1}{3}\right)$, т. е. $P_3(x) = P_2(x) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)$. Найдем многочлен $P_2(x)$, разделив многочлен $P_3(x)$ на двучлен $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ уголком (рис. 3).

Итак, $P_2(x) = 9x^2 - 9x + 9 = 9(x^2 - x + 1)$, тогда $P_4(x) = 9 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 (x^2 - x + 1)$.

Так как дискриминант многочлена $P_2(x)$ отрицательный, то этот многочлен не имеет действительных корней и уравнение (1) имеет два совпавших действительных корня $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$.

Ответ. $-\frac{1}{3}$.

$$
\begin{array}{r|l}
9x^3 - 6x^2 + 6x + 3 & x + \frac{1}{3} \\
\cline{2-2}
\underline{9x^3 + 3x^2 \phantom{{}+6x+3}} & 9x^2 - 9x + 9 \\
-9x^2 + 6x \phantom{{}+3} & \\
\underline{-9x^2 - 3x \phantom{{}+3}} & \\
9x + 3 & \\
\underline{9x + 3} & \\
0 &
\end{array}
$$

Рис. 3

12. Рациональные неравенства

Пример. Решим неравенство

$$\frac{1}{x} + 2 \geqslant \frac{5x+6}{2x+3}. \qquad (1)$$

Решение. Перенеся все члены неравенства (1) в одну сторону и сложив дроби, получим неравенство

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(2x+3)x} \leqslant 0. \qquad (2)$$

Сначала решим уравнение

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{(2x+3)x} = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет два корня $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$.
Теперь решим неравенство

$$\frac{(x+1)(x-3)}{\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 0)} < 0. \qquad (4)$$

Применив к неравенству (4) метод интервалов (рис. 4), получим, что множество всех его решений есть множество $\left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (0; 3)$.

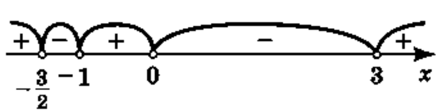

Рис. 4

Объединив множество всех решений уравнения (3) и неравенства (4), получим множество всех решений неравенства (2), а следовательно, и неравенства (1): $\left(-\frac{3}{2}; -1\right] \cup (0; 3]$.

Ответ. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right] \cup (0; 3]$.

13*. Замена неизвестного при решении рациональных неравенств

Пример 1. Решим неравенство

$$(x^2+4x)^2-2(x+2)^2-7 \geqslant 0. \qquad (1)$$

Решение. Обозначив $t=x^2+4x$, перепишем неравенство (1) в виде

$$t^2-2(t+4)-7 \geqslant 0. \qquad (2)$$

Все решения неравенства (2) есть и все $t \leqslant -3$, и все $t \geqslant 5$. Следовательно, все решения неравенства (1) есть объединение всех решений двух неравенств:

$$1)\ x^2+4x \leqslant -3 \quad \text{и} \quad 2)\ x^2+4x \geqslant 5.$$

Неравенство 1) имеет множество решений $[-3; -1]$, а неравенство 2) имеет множество решений $(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$. Следовательно, неравенство (1) имеет множество решений $(-\infty; -5] \cup [-3; -1] \cup [1; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; -5] \cup [-3; -1] \cup [1; +\infty)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$2x^2+x-4+\frac{3}{2x^2+x} \leqslant 0. \qquad (3)$$

Решение. Обозначив $t=2x^2+x$, перепишем неравенство (3) в виде

$$t-4+\frac{3}{t} \leqslant 0. \qquad (4)$$

Все решения неравенства (4) есть и все $t < 0$, и все t, такие, что $1 \leqslant t \leqslant 3$, следовательно, множество решений неравенства (3) есть объединение решений неравенства 1) $2x^2+x < 0$ и системы 2) $\begin{cases} 2x^2+x \geqslant 1 \\ 2x^2+x \leqslant 3 \end{cases}$.

Неравенство 1) имеет множество решений $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$, а система 2) имеет множество решений $\left[-\frac{3}{2}; -1\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Следовательно, неравенство (3) имеет множество решений $\left[-\frac{3}{2}; -1\right] \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ответ. $\left[-\frac{3}{2}; -1\right] \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

14*. Замена неизвестного при решении иррациональных уравнений и неравенств

Пример 1. Решим уравнение

$$\sqrt{x-1} = 12 - 2x. \qquad (1)$$

Решение. Обозначив $t = \sqrt{x-1}$, перепишем уравнение (1) в виде

$$2t^2 + t - 10 = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет два корня $t_1 = -\frac{5}{2}$, $t_2 = 2$. Следовательно, все корни уравнения (1) являются корнями двух уравнений:

$$1)\ \sqrt{x-1} = -\frac{5}{2} \quad \text{и} \quad 2)\ \sqrt{x-1} = 2.$$

Функция $\sqrt{x-1}$ определена лишь при $x \geqslant 1$, на множестве $[1; +\infty)$ она неотрицательна, поэтому уравнение 1) не имеет корней. Так как эта функция на множестве $[1; +\infty)$ возрастает, то уравнение 2) имеет не более одного корня. Легко видеть, что число $x_1 = 5$ является корнем уравнения 2), следовательно, уравнение 2) имеет единственный корень 5. Поэтому уравнение (1) также имеет единственный корень 5.

Ответ. 5.

Пример 2. Решим уравнение

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Решение. Обозначив $t = \sqrt{x}$, перепишем уравнение (3) в виде

$$\frac{t-1}{t+1} - \frac{t-3}{t} = \frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Уравнение (4) имеет два корня $t_1 = -2$ и $t_2 = 3$. Следовательно, все корни уравнения (3) являются корнями двух уравнений:

$$1)\ \sqrt{x} = -2 \quad \text{и} \quad 2)\ \sqrt{x} = 3.$$

Функция $\sqrt{x}$ определена лишь при $x \geqslant 0$, на множестве $[0; +\infty)$ она неотрицательна, поэтому уравнение 1) не имеет корней. Так как эта функция на множестве $[0; +\infty)$ возрастает, то уравнение 2) имеет не более одного корня. Легко видеть, что число $x_1 = 9$ является единственным корнем уравнения 2).

Следовательно, уравнение (3) также имеет единственный корень 9.

Ответ. 9.

Пример 3. Решим неравенство

$$\sqrt{2x-3} > 2x - 5. \qquad (5)$$

Решение. Обозначив $t = \sqrt{2x-3}$, перепишем неравенство (3) в виде

$$t^2 - t - 2 < 0. \qquad (6)$$

Все решения неравенства (6) есть все t, такие, что $-1 < t < 2$. Следовательно, все решения неравенства (5) являются решениями системы неравенств $\begin{cases} \sqrt{2x-3} > -1 \\ \sqrt{2x-3} < 2 \end{cases}$.

Функция $\sqrt{u}$ определена лишь при $u \geqslant 0$, и для этих u она неотрицательна, поэтому первое неравенство системы справедливо для любого x, удовлетворяющего неравенству $2x - 3 \geqslant 0$, то есть для $x \geqslant 1{,}5$, а так как функция $\sqrt{u}$ возрастает для $u \geqslant 0$, то неравенство $\sqrt{u} < \sqrt{4}$ справедливо тогда и только тогда, когда $0 \leqslant u < 4$, поэтому второе неравенство системы справедливо для любого x, удовлетворяющего двойному неравенству $0 \leqslant 2x - 3 < 4$. Решения этого двойного неравенства есть промежуток $[1{,}5; 3{,}5)$, но тогда множество решений системы есть промежуток $[1{,}5; 3{,}5)$.

Следовательно, неравенство (5) имеет то же множество решений.

Ответ. $[1{,}5; 3{,}5)$.

Пример 4. Решим неравенство

$$\frac{x-1}{x+2}-\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}-2 \geqslant 0. \qquad (7)$$

Решение. Обозначив $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$, перепишем неравенство (7) в виде

$$t^2-t-2 \geqslant 0. \qquad (8)$$

Все решения неравенства (8) есть и все $t \leqslant -1$, и все $t \geqslant 2$. Следовательно, все решения неравенства (7) есть объединение всех решений двух неравенств:

$$1)\ \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \leqslant -1 \quad \text{и} \quad 2)\ \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \geqslant 2.$$

Неравенство 1) не имеет решений, так как при всех x, при которых функция $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ определена, справедливо неравенство $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} \geqslant 0$.

Так как функция $\sqrt{u}$ определена лишь при $u \geqslant 0$ и для этих u она возрастает, то неравенство $\sqrt{u} \geqslant \sqrt{4}$ справедливо тогда и только тогда, когда $u \geqslant 4$, поэтому неравенство 2) равносильно неравенству $\frac{x-1}{x+2} \geqslant 4$, которое имеет множество решений $[-3; -2)$.

Следовательно, неравенство (7) имеет множество решений $[-3; -2)$.

Ответ. $[-3; -2)$.

15*. Задачи с параметром

Пример 1. Найдем все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+ax+9=0$ имеет два различных корня, меньших -1.

Решение. Так как уравнение должно иметь два различных корня, то должно выполняться неравенство $D=a^2-36>0$. Так как коэффициент при x^2 больше нуля, то для того, чтобы оба корня были меньше -1, должны выполняться два условия:

абсцисса $x_0=-\frac{a}{2}$ вершины параболы — графика (рис. 5) функции

$f(x)=x^2+ax+9$

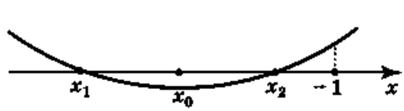

Рис. 5

должна быть меньше –1 и значение функции в точке –1 должно быть положительным:

$$f(-1) = 1 - a + 9 = -a + 10 > 0.$$

При нарушении хотя бы одного из этих условий уравнение или не имеет корней, или они совпадают, или найдется корень уравнения, не меньший –1.

Следовательно, число a удовлетворяет условиям задачи тогда и только тогда, когда a удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} a^2 - 36 > 0 \\ -\dfrac{a}{2} < -1 \\ -a + 10 > 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что искомые значения a удовлетворяют двойному неравенству $6 < a < 10$.

Ответ. (6; 10).

Пример 2. Найдем все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - (2a + 4)x + a^2 + 4a \geqslant 0 \\ |3x - 2a| \leqslant 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Корни квадратного трехчлена, находящегося в левой части первого неравенства системы: $x_1 = a$, $x_2 = a + 4$. Так как при любых значениях a число x_1 меньше, чем число x_2, то все решения первого неравенства системы составляют множество $(-\infty;\ a] \cup [a + 4;\ +\infty)$.

Второе неравенство системы равносильно неравенству $\left|x - \dfrac{2}{3}a\right| \leqslant \dfrac{4}{3}$, все решения которого составляют отрезок $\left[\dfrac{2}{3}a - \dfrac{4}{3};\ \dfrac{2}{3}a + \dfrac{4}{3}\right]$. Так как $\dfrac{8}{3}$ — длина отрезка $\left[\dfrac{2}{3}a - \dfrac{4}{3};\ \dfrac{2}{3}a + \dfrac{4}{3}\right]$

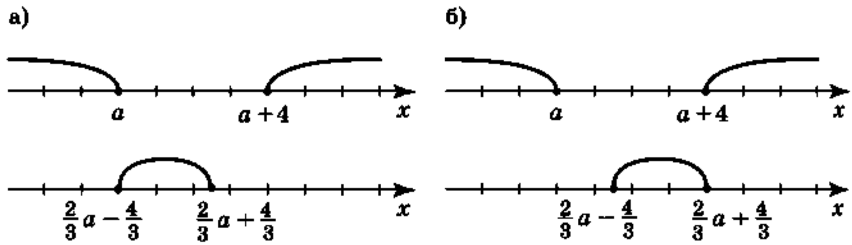

Рис. 6

меньше 4 — длины отрезка $[a;\ a+4]$, то исходная система имеет единственное решение только в двух случаях: или равны числа a и $\frac{2}{3}a-\frac{4}{3}$ (рис. 6, *а*), или равны числа $a+4$ и $\frac{2}{3}a+\frac{4}{3}$ (рис. 6, *б*).

Искомые значения a найдем, решив два уравнения:

$$a=\frac{2}{3}a-\frac{4}{3} \text{ и } a+4=\frac{2}{3}a+\frac{4}{3},$$

откуда $a=-4$ и $a=-8$.

Итак, и при $a=-4$, и при $a=-8$ система имеет единственное решение.

Ответ. -4; -8.

16. Корень степени *n*

Пример 1. Вынесем множитель из-под знака корня $\sqrt[4]{32x^4y^5}$ при условии, что $x<0$.

Решение. Преобразуем выражение

$$\sqrt[4]{32x^4y^5}=\sqrt[4]{2^4\cdot 2x^4y^4\cdot y}=2|x||y|\sqrt[4]{2y}.$$

Так как $x<0$ по условию задачи, а $y\geqslant 0$ (в противном случае корень не имеет смысла), то $|x|=-x$, $|y|=y$, поэтому $2|x||y|\sqrt[4]{2y}=-2xy\sqrt[4]{2y}$.

Ответ. $-2xy\sqrt[4]{2y}$.

Пример 2. Внесем множитель под знак корня $3x^3y\sqrt[4]{2x}$ при условии, что $y<0$.

Решение. Так как $y<0$ по условию задачи, а $x\geqslant 0$ (в противном случае корень не имеет смысла), то

$$3x^3y\sqrt[4]{2x}=\sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[4]{x^{12}}(-1)(-y)\cdot\sqrt[4]{2x}=$$
$$=-\sqrt[4]{81x^{12}}\cdot\sqrt[4]{(-y)^4}\cdot\sqrt[4]{2x}=-\sqrt[4]{162x^{13}(-y)^4}=-\sqrt[4]{162x^{13}y^4}.$$

Ответ. $-\sqrt[4]{162x^{13}y^4}$.

Пример 3. Упростим выражение $\dfrac{1}{4+\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{49}}+\sqrt[3]{7}$.

Решение. Преобразуем знаменатель дроби $4+\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{49}=2^2+2\sqrt[3]{7}+\left(\sqrt[3]{7}\right)^2$ — это неполный квадрат суммы чисел 2 и $\sqrt[3]{7}$. Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби, умножим ее числитель и знаменатель на разность чисел 2 и $\sqrt[3]{7}$:

$$\frac{1}{4+\sqrt[3]{56}+\sqrt[3]{49}}+\sqrt[3]{7}=\frac{2-\sqrt[3]{7}}{\left(2-\sqrt[3]{7}\right)\left(2^2+2\sqrt[3]{7}+\left(\sqrt[3]{7}\right)^2\right)}+\sqrt[3]{7}=$$

$$=\frac{2-\sqrt[3]{7}}{2^3-\left(\sqrt[3]{7}\right)^3}+\sqrt[3]{7}=2.$$

Ответ. 2.

17*. Функция $y=\sqrt[n]{x}$

Пример 1. Сравним числа $\sqrt[3]{9}$ и $\sqrt[4]{18}$.

Решение. Преобразуем данные корни с помощью свойств корня степени n:

$$\sqrt[3]{9}=\sqrt[12]{9^4}=\sqrt[12]{6561},\quad \sqrt[4]{18}=\sqrt[12]{18^3}=\sqrt[12]{5832}.$$

Так как функция $y=\sqrt[12]{x}$ определена и возрастает на множестве $[0;+\infty)$ и для чисел 6561 и 5832 из этого множества справедливо неравенство $6561>5832$, то справедливо и неравенство $\sqrt[12]{6561}>\sqrt[12]{5832}$. Это означает, что $\sqrt[3]{9}>\sqrt[4]{18}$.

Ответ. $\sqrt[3]{9}>\sqrt[4]{18}$.

Пример 2. Сравним числа

$$\sqrt[4]{2005}-\sqrt[3]{2007} \quad \text{и} \quad \sqrt[4]{2004}-\sqrt[3]{2008}.$$

Решение. На множестве всех $x\geqslant 0$ функция $y=\sqrt[4]{x}$ определена и возрастает, а функция $y=-\sqrt[3]{x}$ определена и убывает, поэтому из справедливости неравенств $2005>2004$ и $2007<2008$ следует справедливость неравенств

$$\sqrt[4]{2005}>\sqrt[4]{2004} \quad \text{и} \quad -\sqrt[3]{2007}>-\sqrt[3]{2008}. \qquad (1)$$

Сложив почленно верные числовые неравенства (1), получим верное числовое неравенство

$$\sqrt[4]{2005}-\sqrt[3]{2007}>\sqrt[4]{2004}-\sqrt[3]{2008}.$$

Ответ. $\sqrt[4]{2005}-\sqrt[3]{2007}>\sqrt[4]{2004}-\sqrt[3]{2008}$.

Пример 3. Докажем, что функция $y = \sqrt[3]{5-3x}$ является убывающей.

Доказательство. Функция $y = \sqrt[3]{5-3x}$ определена для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Пусть $x_1 \in \boldsymbol{R}$, $x_2 \in \boldsymbol{R}$ и $x_1 < x_2$, тогда $t_1 = t(x_1) = 5 - 3x_1$, $t_2 = t(x_2) = 5 - 3x_2$. Из убывания линейной функции $t(x) = 5 - 3x$ следует справедливость неравенства $t_1 > t_2$, а из возрастания функции $y = \sqrt[3]{t}$ следует справедливость неравенства $\sqrt[3]{t_1} > \sqrt[3]{t_2}$, т. е. справедливость неравенства $\sqrt[3]{5-3x_1} > \sqrt[3]{5-3x_2}$. А это означает, что функция $y = \sqrt[3]{5-3x}$ является убывающей, что и требовалось доказать.

Пример 4. Решим уравнение $\sqrt[3]{5x+1} + \sqrt[4]{3x} = \sqrt[7]{1-3x}$.

Решение. Все корни уравнения принадлежат множеству $[0; +\infty)$. На множестве $[0; +\infty)$ функция $f(x) = \sqrt[3]{5x+1} + \sqrt[4]{3x}$ возрастает, а функция $g(x) = \sqrt[7]{1-3x}$ убывает, поэтому если найдется значение $x_0 \in [0; +\infty)$, такое, что $f(x_0) = g(x_0)$, то такое число единственное, так как для всех $x > x_0$ справедливы неравенства $f(x) > f(x_0) = g(x_0) > g(x)$, а для всех $0 \leqslant x < x_0$ справедливы неравенства $f(x) < f(x_0) = g(x_0) < g(x)$.

Так как $f(0) = g(0)$, то $x_0 = 0$ — единственный корень уравнения.

Ответ. 0.

18. Степень с рациональным показателем

Пример 1. Вычислим

$$A = \left(\left(3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 4 \cdot 6^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(\left(3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 4 \cdot 6^{\frac{1}{2}}\right).$$

Решение. Применяя формулы квадрата суммы и квадрата разности, имеем

$$\left(3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 4 \cdot 6^{\frac{1}{2}} = 3 + 2 \cdot 6^{\frac{1}{2}} + 2 - 4 \cdot 6^{\frac{1}{2}} = 5 - 2 \cdot 6^{\frac{1}{2}};$$

$$\left(3^{\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 4 \cdot 6^{\frac{1}{2}} = 3 - 2 \cdot 6^{\frac{1}{2}} + 2 + 4 \cdot 6^{\frac{1}{2}} = 5 + 2 \cdot 6^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя формулу разности квадратов, получаем

$$A = \left(5 - 2 \cdot 6^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(5 + 2 \cdot 6^{\frac{1}{2}}\right) = 25 - 4 \cdot 6 = 1.$$

Ответ. 1.

Пример 2. Вычислим

$$B = \frac{2b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}} - \left(\frac{b^{\frac{1}{3}} + 3}{b^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}}\right)^2 : \left(\frac{1}{b^{\frac{1}{3}} - 3} + \frac{3b^{\frac{1}{3}}}{b - 27}\right).$$

Решение.

1) Так как $b - 27 = \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 3^3 = \left(b^{\frac{1}{3}} - 3\right)\left(b^{\frac{2}{3}} + 3b^{\frac{1}{3}} + 9\right)$, то

$b^{\frac{2}{3}} + 3b^{\frac{1}{3}} + 9$

$$\frac{1}{b^{\frac{1}{3}} - 3} + \frac{3b^{\frac{1}{3}}}{b - 27} = \frac{b^{\frac{2}{3}} + 3b^{\frac{1}{3}} + 9 + 3b^{\frac{1}{3}}}{b - 27} = \frac{\left(b^{\frac{1}{3}} + 3\right)^2}{b - 27};$$

2) $$\left(\frac{b^{\frac{1}{3}} + 3}{b^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}}\right)^2 : \frac{\left(b^{\frac{1}{3}} + 3\right)^2}{b - 27} = \frac{\left(b^{\frac{1}{3}} + 3\right)^2 (b - 27)}{\left(b^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}\right)^2 \left(b^{\frac{1}{3}} + 3\right)^2} = \frac{b - 27}{\left(b^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}\right)^2};$$

3) $$B = \frac{2b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}} - \frac{b - 27}{\left(b^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}\right)^2} = \frac{2b^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}\right) - b + 27}{\left(b^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{b - 2b^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{3}{2}} + \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^2}{\left(b^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}\right)^2} = 1.$$

Ответ. 1.

19*. Предел последовательности

Пример 1. Пусть переменная y_n неотрицательна для любого натурального n и имеет пределом некоторое положительное число. Докажем, пользуясь теоремами о пределах, что $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{y_n} = \sqrt{\lim\limits_{n \to +\infty} y_n}$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $x_n = \sqrt{y_n}$. По теореме о пределе произведения имеем

$$\lim_{n \to +\infty} x_n^2 = \lim_{n \to +\infty} (x_n \cdot x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_n \cdot \lim_{n \to +\infty} x_n = \left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right)^2.$$

Так как $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^2$ и $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} x_n\right)^2$ неотрицательны, то справедливы равенства $\sqrt{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n^2} = \sqrt{\left(\lim\limits_{n \to +\infty} x_n\right)^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$, а это означает, что $\sqrt{\lim\limits_{n \to +\infty} y_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{y_n}$, что и требовалось доказать.

Пример 2. Вычислим $A = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(\sqrt{4n^2+6n-1} - \sqrt{4n^2+2n+5}\right)$.

Решение. Преобразуем выражение

$$\sqrt{4n^2+6n-1} - \sqrt{4n^2+2n+5} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{4n^2+6n-1} - \sqrt{4n^2+2n+5}\right)\left(\sqrt{4n^2+6n-1} + \sqrt{4n^2+2n+5}\right)}{\sqrt{4n^2+6n-1} + \sqrt{4n^2+2n+5}} =$$

$$= \frac{(4n^2+6n-1)-(4n^2+2n+5)}{\sqrt{4n^2+6n-1} + \sqrt{4n^2+2n+5}} = \frac{4n-6}{\sqrt{4n^2+6n-1} + \sqrt{4n^2+2n+5}} =$$

$$= \frac{4-\frac{6}{n}}{\sqrt{4+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}}.$$

Так как $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(4 - \frac{6}{n}\right) = 4$, а по теореме о пределе суммы и по доказанному в примере 1

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\sqrt{4+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}\right) =$$

$$= \sqrt{\lim_{n \to +\infty}\left(4+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{\lim_{n \to +\infty}\left(4+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}\right)} = 2+2 = 4,$$

то по теореме о пределе частного $A = \frac{4}{4} = 1$.

Ответ. 1.

Пример 3. Докажем, что переменная $x_n = 5 - n^2$ является бесконечно большой, пользуясь определением бесконечно большой (на языке «$M - N$»).

Доказательство. Пусть дано положительное достаточно большое число M. Тогда неравенство

$$|5 - n^2| > M \qquad (1)$$

выполнено, если $n^2 - 5 > M$, т. е. если $n > \sqrt{M+5}$.

Выберем число $N = \sqrt{M+5}$, тогда для любого $n > N$ выполнено неравенство (1), а это означает, что переменная $x_n = 5 - n^2$ является бесконечно большой, что и требовалось доказать.

Пример 4. Докажем, что переменная $x_n = \frac{-3}{5n-6}$ является бесконечно малой, пользуясь определением бесконечно малой (на языке «$\varepsilon - N$»).

Доказательство. Пусть дано положительное достаточно малое число ε. Тогда неравенство

$$\left|\frac{-3}{5n-6}\right| < \varepsilon \qquad (2)$$

выполнено, если $5n - 6 > \frac{3}{\varepsilon}$, т. е. если $n > \frac{3}{5\varepsilon} + \frac{6}{5}$.

Выберем число $N = \frac{3}{5\varepsilon} + \frac{6}{5}$, тогда для любого $n > N$ выполнено неравенство (2), а это означает, что переменная $x_n = \frac{-3}{5n-6}$ является бесконечно малой, что и требовалось доказать.

20. Логарифмы

Пример 1. Докажем свойство логарифмов

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}. \qquad (1)$$

Решение. Отметим, что по определению логарифма в доказываемом равенстве $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$.

Если $a = 1$, или $c = 1$, или $a = c = 1$, то равенство (1), очевидно, справедливо.

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$, тогда справедливы равенства

$$a^{\log_b c} = (c^{\log_c a})^{\log_b c} = c^{\log_c a \cdot \log_b c} = c^{\log_b c^{\log_c a}} = c^{\log_b a},$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Вычислим значение выражения

$$A = \log_{0,2}\left(3^{\log_9(3+\sqrt{3})^2} + 2^{\log_{16}(\sqrt{3}-2)^4}\right).$$

Решение. Так как $3+\sqrt{3} > 0$, то $3^{\log_9(3+\sqrt{3})^2} = 3^{\log_3(3+\sqrt{3})} = 3 + \sqrt{3}$. Так как $\sqrt{3} - 2 < 0$ и $16 = 2^4$, то $2^{\log_{16}(\sqrt{3}-2)^4} = 2^{\log_2|\sqrt{3}-2|} = |\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$.

Тогда $A = \log_{0,2}(3 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}) = \log_{\frac{1}{5}} 5 = -1$.

Ответ. -1.

Пример 3. Сравним числа:

а) $\log_3 5$ и $\log_4 3$; б) $\log_{0,3} 5$ и $\log_{0,3} 6$;

в) $\log_3 5$ и $\log_4 5$; г) $\log_3 5$ и $\log_4 6$.

Решение.

а) Так как $\log_3 5 > 1$, а $\log_4 3 < 1$, то $\log_3 5 > \log_4 3$.

б) Так как функция $y = \log_{0,3} t$ убывает на множестве $(0; +\infty)$, то из справедливости неравенства $5 < 6$ следует справедливость неравенства $\log_{0,3} 5 > \log_{0,3} 6$.

в) Преобразуем каждый из логарифмов: $\log_3 5 = \dfrac{1}{\log_5 3}$ и $\log_4 5 = \dfrac{1}{\log_5 4}$. Так как $\log_5 3 < \log_5 4$ и обе дроби положительные, то $\dfrac{1}{\log_5 3} > \dfrac{1}{\log_5 4}$. Следовательно, справедливо неравенство $\log_3 5 > \log_4 5$.

г) Рассмотрим $3\log_3 5 = \log_3 125$ и $3\log_4 6 = \log_4 216$. Так как $3^4 < 125 < 3^5$ и $4^3 < 216 < 4^4$, то справедливы двойные неравенства $4 < \log_3 125 < 5$, $\quad 3 < \log_4 216 < 4$.

Из этих неравенств следует, что $\log_3 125 > \log_4 216$. Но $\log_3 125 = 3\log_3 5$, а $\log_4 216 = 3\log_3 6$, поэтому из справедливости неравенства $\log_3 125 > \log_4 216$ следует справедливость неравенства $\log_3 5 > \log_4 6$.

Ответ. а) $\log_3 5 > \log_4 3$; б) $\log_{0,3} 5 > \log_{0,3} 6$;
в) $\log_3 5 > \log_4 5$; г) $\log_3 5 > \log_4 6$.

Пример 4. Докажем иррациональность числа $\log_2 5$.

Доказательство. Предположим, что $\log_2 5$ — число рациональное, т. е. пусть $\log_2 5 = \dfrac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа, не имеющие общего делителя. Тогда по определению логарифма справедливо равенство $2^{\frac{p}{q}} = 5$. Возведя это равенство в степень q, получим верное равенство $2^p = 5^q$. Но последнее равенство невозможно ни для каких натуральных чисел p и q, так как в левой его части всегда четное число, а в правой нечетное. Следовательно, $\log_2 5$ — число иррациональное, что и требовалось доказать.

21. Показательные и логарифмические уравнения

Пример 1. Решим уравнение

$$2^{3x-2} = 0,5. \tag{1}$$

Решение. Обозначив $t = 3x - 2$, перепишем уравнение (1) в виде

$$2^t = 2^{-1}. \tag{2}$$

Уравнение (2) имеет единственный корень $t_1 = -1$, следовательно, все корни уравнения (1) являются корнями уравнения

$$3x - 2 = -1. \tag{3}$$

Так как уравнение (3) имеет единственный корень $x_1 = \frac{1}{3}$, то уравнение (1) тоже имеет единственный корень $x_1 = \frac{1}{3}$.

Ответ. $\frac{1}{3}$.

Пример 2. Решим уравнение

$$\log_{\frac{1}{4}}(7x - 5) = -2. \tag{4}$$

Решение. Обозначив $t = 7x - 5$, перепишем уравнение (4) в виде

$$\log_{\frac{1}{4}} t = -2. \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет единственный корень $t_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$, следовательно, все корни уравнения (4) являются корнями уравнения

$$7x - 5 = 16. \tag{6}$$

Так как уравнение (6) имеет единственный корень $x_1 = 3$, то уравнение (4) тоже имеет единственный корень $x_1 = 3$.

Ответ. 3.

Пример 3. Решим уравнение

$$2^{2x-5} - 3 \cdot 2^{x-3} + 1 = 0. \tag{7}$$

Решение. Обозначив $t = 2^{x-3}$, перепишем уравнение (7) в виде

$$2t^2 - 3t + 1 = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) имеет два корня $t_1 = 1$ и $t_2 = \frac{1}{2}$, следовательно, все корни уравнения (7) являются корнями двух уравнений:

$$1)\ 2^{x-3} = 1 \quad \text{и} \quad 2)\ 2^{x-3} = \frac{1}{2}.$$

Так как уравнение 1) имеет единственный корень $x_1 = 3$, а уравнение 2) имеет единственный корень $x_2 = 2$, то уравнение (7) имеет два корня 2 и 3.

Ответ. 2; 3.

Пример 4. Решим уравнение

$$\log_2(3x-5)-\frac{1}{\log_2(3x-5)-2}-2=0. \qquad (9)$$

Решение. Обозначив $t=\log_2\ (3x-5)-2$, перепишем уравнение (9) в виде

$$t-\frac{1}{t}=0. \qquad (10)$$

Уравнение (10) имеет два корня $t_1=-1$ и $t_2=1$, следовательно, все корни уравнения (9) являются корнями двух уравнений:

1) $\log_2(3x-5)-2=-1$ и 2) $\log_2(3x-5)-2=1$.

Так как уравнение 1) имеет единственный корень $x_1=\frac{7}{3}$, а уравнение 2) имеет единственный корень $x_2=\frac{13}{3}$, то уравнение (9) имеет два корня $\frac{7}{3}$ и $\frac{13}{3}$.

Ответ. $\frac{7}{3}$; $\frac{13}{3}$.

22. Показательные и логарифмические неравенства

Пример 1. Решим неравенство

$$(0{,}5)^{5x+3}>4. \qquad (1)$$

Решение. Обозначив $t=5x+3$, перепишем неравенство (1) в виде

$$(0{,}5)^t>(0{,}5)^{-2}. \qquad (2)$$

Неравенство (2) равносильно неравенству $t<-2$, следовательно, все решения неравенства (1) совпадают с решениями неравенства

$$5x+3<-2. \qquad (3)$$

Так как множество всех решений неравенства (3) есть все $x\in(-\infty;-1)$, то и неравенство (1) имеет те же решения.

Ответ. $(-\infty;-1)$.

Пример 2. Решим неравенство

$$\log_3(2x-1)\leqslant 2. \qquad (4)$$

Решение. Обозначив $t=2x-1$, перепишем неравенство (4) в виде

$$\log_3 t\leqslant 2. \qquad (5)$$

Неравенство (5) равносильно двойному неравенству $0 < t \leqslant 9$, следовательно, все решения неравенства (4) совпадают с решениями двойного неравенства

$$0 < 2x - 1 \leqslant 9. \qquad (6)$$

Так как множество всех решений неравенства (6) есть все $x \in (0{,}5;\ 5]$, то и неравенство (4) имеет те же решения.

Ответ. $(0{,}5;\ 5]$.

Пример 3. Решим неравенство

$$\log_{0,2}^2 x - 3\log_{0,2} x + 2 \geqslant 0. \qquad (7)$$

Решение. Обозначив $t = \log_{0,2} x$, перепишем неравенство (7) в виде

$$t^2 - 3t + 2 \geqslant 0. \qquad (8)$$

Все решения неравенства (8) есть и все $t \leqslant 1$, и все $t \geqslant 2$, следовательно, все решения неравенства (7) совпадают со всеми решениями двух неравенств:

$$1)\ \log_{0,2} x \leqslant 1 \quad \text{и} \quad 2)\ \log_{0,2} x \geqslant 2.$$

Так как множество всех решений неравенства 1) есть промежуток $[0{,}2; +\infty)$, а множество всех решений неравенства 2) есть промежуток $(0;\ 0{,}04]$, то все решения неравенства (7) составляют множество $(0;\ 0{,}04] \cup [0{,}2; +\infty)$.

Ответ. $(0;\ 0{,}04] \cup [0{,}2; +\infty)$.

Пример 4. Решим неравенство

$$(3 - 2\sqrt{2})^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x + 1 < 0. \qquad (9)$$

Решение. Так как $\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$, то, обозначив $t = (3 - 2\sqrt{2})^x$, перепишем неравенство (9) в виде

$$t^2 - 6t + 1 < 0. \qquad (10)$$

Множество всех решений неравенства (10) есть все t, такие, что $3 - 2\sqrt{2} < t < 3 + 2\sqrt{2}$, следовательно, все решения неравенства (9) совпадают с решениями двойного неравенства

$$3 - 2\sqrt{2} < (3 - 2\sqrt{2})^x < 3 + 2\sqrt{2}. \qquad (11)$$

Так как $3 + 2\sqrt{2} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}}$ и $0 < 3 - 2\sqrt{2} < 1$, то неравенство (11) равносильно двойному неравенству $-1 < x < 1$. Это означает, что множество решений неравенства (9) есть интервал $(-1; 1)$.

Ответ. $(-1;\ 1)$.

23*. «Однородные» показательные уравнения и неравенства

Пример 1. Решим уравнение

$$25 \cdot 3^x - 9 \cdot 5^x = 0. \tag{1}$$

Решение. Так как $5^x \neq 0$ для любых действительных x, то, вынося множитель 5^x за скобки, перепишем уравнение (1) в виде

$$5^x\left(25 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x - 9\right) = 0. \tag{2}$$

Так как $5^x \neq 0$ для любых действительных x, то все корни уравнения (2), а значит и уравнения (1), совпадают с корнями уравнения

$$25 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x - 9 = 0, \tag{3}$$

которое можно переписать в виде

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^2. \tag{4}$$

Уравнение (4) имеет единственный корень 2, следовательно, уравнение (1) также имеет единственный корень 2.

Ответ. 2.

Замечания: 1. Если обозначить $3^x = u$, $5^x = v$, то уравнение (1) можно записать в виде $25u - 9v = 0$. Такое уравнение является однородным уравнением первой степени относительно пары $(u;\ v)$.

2. При решении уравнений типа (1) часто не делают проведенных выше выкладок, а просто пишут: так как $5^x \neq 0$ для любого действительного x, то, разделив уравнение (1) на 5^x, получим уравнение (3), имеющее те же корни, что и уравнение (1), и далее решают уравнение (3), как показано выше.

Пример 2. Решим уравнение

$$4^{x+1} - 11 \cdot 4^{x-1} = 5^x. \tag{5}$$

Решение. Перепишем уравнение (5) в виде

$$16 \cdot 4^x - 11 \cdot 4^x = 4 \cdot 5^x,$$

$$5 \cdot 4^x = 4 \cdot 5^x. \tag{6}$$

Так как $5^x \neq 0$ для любого действительного x, то, разделив уравнение (6) на 5^x, получим уравнение

$$5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x = 4, \tag{7}$$

имеющее те же корни, что и уравнение (5).

Уравнение (7) имеет единственный корень 1, следовательно, уравнение (5) также имеет единственный корень 1.

Ответ. 1.

Пример 3. Решим неравенство

$$6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x > 0. \tag{8}$$

Решение. Так как $4^x > 0$ для любых действительных x, то, вынеся множитель 4^x за скобки, перепишем неравенство (8) в виде

$$4^x \cdot \left(6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 6\right) > 0. \tag{9}$$

Так как $4^x > 0$ для любых действительных x, то все решения неравенства (9) совпадают с решениями неравенства

$$6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 > 0. \tag{10}$$

Обозначив $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, перепишем неравенство (10) в виде

$$6t^2 - 13t + 6 > 0. \tag{11}$$

Множество всех решений неравенства (11) есть и все $t < \frac{2}{3}$, и все $t > \frac{3}{2}$, поэтому множество всех решений неравенства (8) есть объединение множеств решений двух неравенств:

$$1) \left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad 2) \left(\frac{3}{2}\right)^x > \frac{3}{2}.$$

Множество всех решений неравенства 1) есть интервал $(-\infty; -1)$, множество всех решений неравенства 2) есть интервал $(1; +\infty)$, поэтому все решения неравенства (8) составляют множество $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Замечания: **1.** Если обозначить $3^x = u$, $2^x = v$, то неравенство (8) можно записать в виде $6u^2 - 13uv + 6v^2 > 0$. Такое неравенство является однородным неравенством второй степени относительно пары $(u; v)$.

2. При решении уравнений типа (8) часто не делают проведенных выше выкладок, а просто пишут: так как $2^x > 0$ для любого действительного x, то, разделив неравенство (8) на 2^x, получим неравенство (10), имеющее те же решения, что и неравенство (8), и далее решают неравенство (10), как показано выше.

24. Градусная и радианная меры угла

Пример 1. Выразим величину угла α в радианах, если $\alpha = 150°$; $\alpha = 210°$.

Решение. Так как развернутый угол содержит 180° или π радиан, то $1° = \frac{\pi}{180}$ радиан. Поэтому $150° = 150 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ радиан, а $210° = 210 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$ радиан.

Пример 2. Выразим величину угла α в градусах, если $\alpha = \frac{4\pi}{3}$, $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

Решение. Так как развернутый угол содержит π радиан или 180°, то 1 радиан $= \frac{180°}{\pi}$. Поэтому $\frac{4\pi}{3}$ радиан $= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 240°$, а $\frac{7\pi}{4}$ радиан $= \frac{7\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = 315°$.

25. Запись углов, заданных точками единичной окружности

Пример 1. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β, заключенным в промежутке от 0° до 360° (рис. 7, *а*). Выразим α и β в градусах.

Решение. Так как углы α и β заключены в промежутке от 0° до 360°, то на рисунке изображены углы $\alpha = 180°$ и $\beta = 270°$.

Ответ. $\alpha = 180°$, $\beta = 270°$.

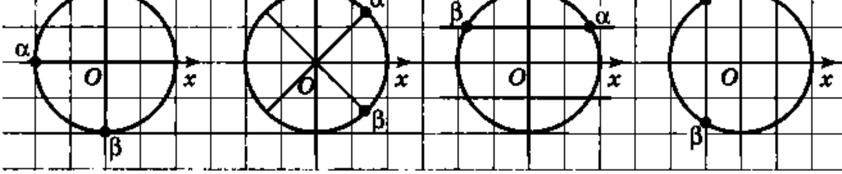

Рис. 7

Пример 2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β, заключенным в промежутке от 0 до 2π радиан (рис. 7, *б*). Выразим α и β в радианах.

Решение. Так как углы α и β заключены в промежутке от 0 до 2π радиан, то на рисунке 7, *б* изображены углы $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\beta = \frac{7\pi}{4}$.

Ответ. $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{7\pi}{4}$.

Пример 3. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β (рис. 7, *в*). Запишем все такие углы α и β, используя градусную меру.

Решение. На рисунках 8, *а* и 8, *б* изображены углы α_0 и β_0 в промежутке от 0° до 360°, т. е. $\alpha_0 = 30°$, $\beta_0 = 150°$. Любой другой угол α отличается от угла α_0 на $360° \cdot n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, поэтому все углы α запишем так: $\alpha = 30° + 360° \cdot n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Аналогично все углы β запишем так: $\beta = 150° + 360° \cdot n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\alpha = 30° + 360° \cdot n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\beta = 150° + 360° \cdot n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 4. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β (рис. 7, *г*). Запишите все такие углы α и β, используя радианную меру.

Решение. На рисунках 9, *а* и 9, *б* изображены углы α_0 и β_0 в промежутке от 0 до 2π радиан, т. е. $\alpha_0 = \frac{2\pi}{3}$ радиан, $\beta_0 = \frac{4\pi}{3}$ радиан. Любой другой угол α отличается от угла α_0 на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, поэтому все углы α запишем так: $\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Аналогично все углы β запишем так: $\beta = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\beta = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

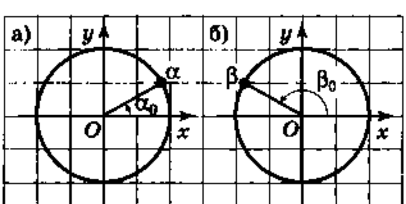

Рис. 8

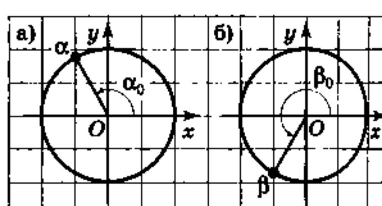

Рис. 9

Пример 1. Определим синус и косинус острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 10).

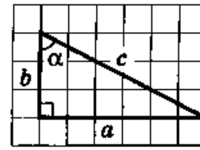

Рис. 10

Решение. Из курса геометрии известно, что синус острого угла прямоугольного треугольника есть отношение противолежащего катета к гипотенузе, косинус — отношение прилежащего катета к гипотенузе, поэтому $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Ответ. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Пример 2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α, β, γ и φ (рис. 11). Определим значения синуса и косинуса каждого из этих углов.

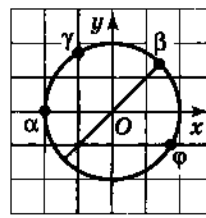

Рис. 11

Решение. Так как по определению значения синуса и косинуса угла есть соответственно ордината и абсцисса точки единичной окружности, соответствующей этому углу, то $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = -1$; $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$; $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ. $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = -1$; $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$; $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 3. Изобразим на единичной окружности точки, соответствующие всем таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

а) $\sin\alpha = 0$; б) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos\alpha = 0$; г) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Запишем все такие углы α.

Решение.

а) Всем углам α, для которых $\sin\alpha = 0$, соответствуют две точки единичной окружности (рис. 12, *а*). Все такие углы составляют две серии углов: $\alpha_k = 0 + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и $\alpha_n = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Углы α_k и α_n можно объединить в одну серию: $\alpha_m = \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

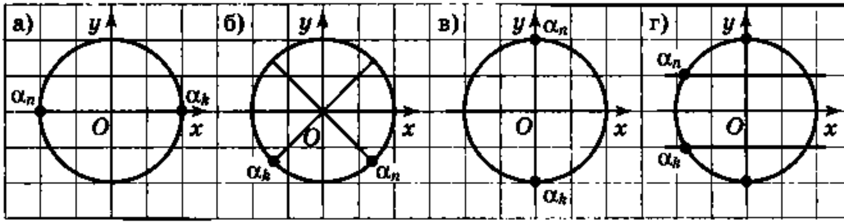

Рис. 12

б) Всем углам α, для которых $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, соответствуют две точки единичной окружности (рис. 12, *б*). Все такие углы составляют две серии углов: $\alpha_n = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и $\alpha_k = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Углы α_n и α_k можно объединить в одну серию: $\alpha_m = (-1)^m\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi m = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

в) Всем углам α, для которых $\cos\alpha = 0$, соответствуют две точки единичной окружности (рис. 12, *в*). Все такие углы составляют две серии углов: $\alpha_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, и $\alpha_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Углы α_k и α_n можно объединить в одну серию: $\alpha_m = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

г) Всем углам α, для которых $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, соответствуют две точки единичной окружности (рис. 12, *г*). Все такие углы составляют две серии углов: $\alpha_k = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и $\alpha_n = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Углы α_k и α_n можно объединить в одну серию: $\alpha_m = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

27. Формулы для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$

Основные формулы для синусов и косинусов углов:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tag{1}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \tag{2}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \tag{3}$$

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}, \tag{4}$$

$$\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}, \tag{5}$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \tag{6}$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha. \tag{7}$$

Пример 1. Вычислим $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. По формуле (1) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$. Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha < 0$, следовательно, $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$.

Ответ. $-\frac{12}{13}$.

Пример 2. Докажем, что для любых α справедливо равенство $\sin(5\pi - \alpha) = \sin\alpha$.

Решение. По формуле (4) $\sin(5\pi - \alpha) = \sin((\pi - \alpha) + 4\pi) = \sin(\pi - \alpha)$. По формулам (6) и (2) $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\pi + (-\alpha)) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha$, что и требовалось доказать.

Пример 3. Вычислим $A = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} + \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sin\alpha}$, если $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Пользуясь формулой (1) и равенством $\sqrt{a^2} = |a|$, имеем

$$A = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha}} + \frac{\sqrt{\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|} + \frac{|\sin\alpha|}{\sin\alpha}.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$ и $\sin\alpha < 0$, поэтому $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ и $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$ и $A = \frac{\cos\alpha}{-\cos\alpha} + \frac{-\sin\alpha}{\sin\alpha} = -1 - 1 = -2$.

Ответ. -2.

28*. Арксинус и арккосинус

Пример 1. Изобразим на единичной окружности точки, соответствующие углам $\alpha = \arcsin\frac{2}{5}$, $\beta = \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$, $\gamma = \arccos\frac{2}{5}$, $\varphi = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$.

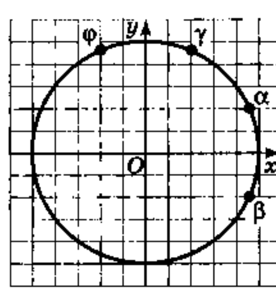

Рис. 13

Решение. Выберем для единичной окружности радиус в 5 клеток (рис. 13). Углы α и β принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, причем $\sin\alpha = \frac{2}{5}$, $\sin\beta = -\frac{2}{5}$. Углы γ и φ принадлежат промежутку $[0; \pi]$, причем $\cos\gamma = \frac{2}{5}$,

$\cos\varphi = -\frac{2}{5}$. Точки, соответствующие углам α, β, γ и φ, изображены на рисунке 13.

Пример 2. Вычислим:

а) $\arcsin(\sin 10)$; б) $\arcsin(\cos 0{,}8\pi)$; в) $\arccos(\cos 10)$.

Решение.

а) Число 10 не принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, преобразуем $\sin 10$ так, чтобы аргумент синуса принадлежал промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $\sin 10 = \sin(3\pi - 10)$ и $(3\pi - 10) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому $\arcsin(\sin 10) = \arcsin(\sin(3\pi - 10)) = 3\pi - 10$.

б) Преобразуем $\cos 0{,}8\pi$ так, чтобы аргумент синуса принадлежал промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $\cos 0{,}8\pi = \sin(0{,}5\pi - 0{,}8\pi) = \sin(-0{,}3\pi)$ и $(-0{,}3\pi) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому $\arcsin(\cos 0{,}8\pi) = \arcsin(\sin(-0{,}3\pi)) = -0{,}3\pi$.

в) Число 10 не принадлежит промежутку $[0; \pi]$, преобразуем $\cos 10$ так, чтобы аргумент косинуса принадлежал промежутку $[0; \pi]$: $\cos 10 = \cos(4\pi - 10)$ и $(4\pi - 10) \in [0; \pi]$, поэтому $\arccos(\cos 10) = \arccos(\cos(4\pi - 10)) = 4\pi - 10$.

Ответ. а) $3\pi - 10$; б) $-0{,}3\pi$; в) $4\pi - 10$.

29. Тангенс и котангенс угла

Пример 1. Определим тангенс и котангенс острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 14).

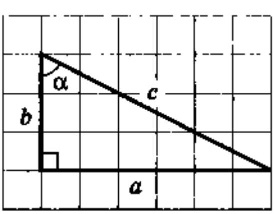

Рис. 14

Решение. Из курса геометрии известно, что тангенс острого угла прямоугольного треугольника есть отношение противолежащего катета к прилежащему, а котангенс — отношение прилежащего катета к противолежащему, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

Пример 2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α, β и γ (рис. 15). Определим значения тангенса и котангенса каждого из этих углов.

Решение. Так как тангенс угла есть координата точки оси тангенсов, соответствующей этому углу, а котангенс угла есть координата точки оси котангенсов, соответствующей этому углу, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\beta = 1$; $\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$; $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\beta = 1$; $\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

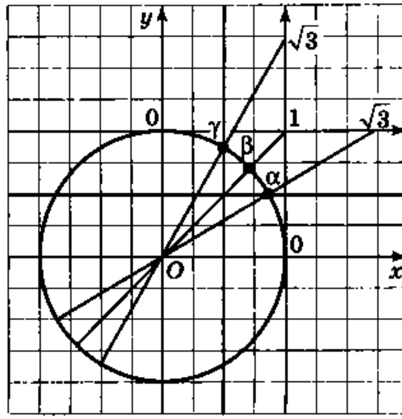

Рис. 15

Пример 3. Изобразим на единичной окружности точки, соответствующие всем таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

а) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -1$; в) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Запишем все такие углы α.

Решение. а) Проведем ось тангенсов. Всем углам α, для которых $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, соответствуют две точки единичной окружности (рис. 16, *а*). Все такие углы составляют серию углов $a_n = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

б) Проведем ось тангенсов. Всем углам α, для которых $\operatorname{tg}\alpha = -1$, соответствуют две точки единичной окружности (рис. 16, *б*). Все такие углы составляют серию углов $a_n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

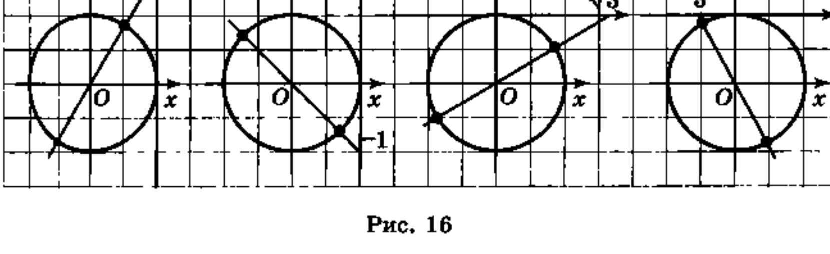

Рис. 16

в) Проведем ось котангенсов. Всем углам α, для которых $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$, соответствуют две точки единичной окружности (рис. 16, *в*). Все такие углы составляют серию углов $a_n = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

г) Проведем ось котангенсов. Всем углам α, для которых $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, соответствуют две точки единичной окружности (рис. 16, *г*). Все такие углы составляют серию углов $a_n = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

30. Формулы для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$

Основные формулы для тангенсов и котангенсов углов:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad (1)$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}, \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg}\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}, \qquad (4)$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \qquad (5)$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad (6)$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (7)$$

Примечание. Равенства (1) – (7) справедливы для всех таких углов α, для которых определены обе части этих равенств.

Пример 1. Вычислим $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. По формуле (5) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2{,}4} = \frac{5}{12}$. По формуле (6) $\cos^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \frac{1}{2{,}4^2 + 1} = \frac{1}{6{,}76} = \frac{25}{169}$. Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$ и $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$. Из формулы $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ следует, что $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13}$.

Ответ. $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$.

Пример 2. Вычислим $A = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = -0{,}8$.

Решение. Преобразуем

$$A = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Возведя равенство $\sin\alpha - \cos\alpha = -0{,}8$ в квадрат, найдем, что $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}18$, тогда $A = \dfrac{1}{0{,}18} = \dfrac{50}{9}$.

Ответ. $\dfrac{50}{9}$.

31*. Арктангенс и арккотангенс

Пример 1. Изобразим на единичной окружности точки, соответствующие углам $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}$, $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{7}{5}$, $\gamma = \operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{3}{5}\right)$, $\varphi = \operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{6}{5}\right)$.

Решение. Выберем для единичной окружности радиус 5 клеток (рис. 17). Проведем ось тангенсов и ось котангенсов. Углы α и β принадлежат промежутку $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, причем $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{7}{5}$; углы γ и φ принадлежат промежутку $(0; \pi)$, причем $\operatorname{ctg}\gamma = \; = -\dfrac{3}{5}$, $\operatorname{ctg}\varphi = -\dfrac{6}{5}$. Точки, соответствующие углам α, β, γ и φ, изображены на рисунке 17.

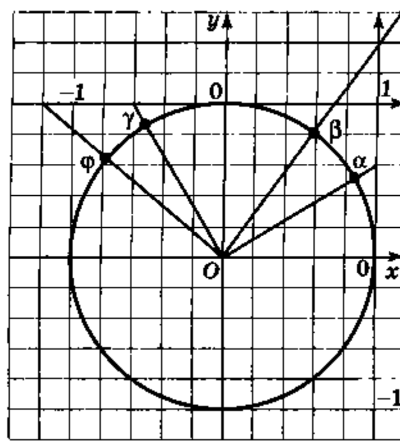

Рис. 17

Пример 2. Вычислим $\operatorname{tg}(\arcsin a)$.

Решение. Обозначим $\alpha = \arcsin a$. Так как $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $\sin\alpha = a$.

Сначала вычислим $\operatorname{tg}^2\alpha$: $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = \dfrac{a^2}{1 - a^2}$. Учитывая, что в промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ имеют одинаковые знаки, имеем $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$.

Ответ. $\dfrac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$.

32. Косинус суммы и косинус разности двух углов. Синус суммы и синус разности двух углов

Формулы косинуса разности и косинуса суммы двух углов:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Формулы синуса разности и синуса суммы двух углов:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha, \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha. \qquad (4)$$

Пример 1. Вычислим:

а) $A = \cos 37^\circ \cos 53^\circ - \sin 37^\circ \sin 53^\circ$;

б) $B = \sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

Решение. а) По формуле (2) $A = \cos(37^\circ + 53^\circ) = \cos 90^\circ = 0$.

б) По формуле (3) $B = \sin\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Ответ. а) 0; б) $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Упростим выражение

$$C = \cos(x - y)\cos(x + y) + \sin(x - y)\sin(x + y).$$

Решение. По формуле (1)

$$C = \cos((x - y) - (x + y)) = \cos(-2y) = \cos 2y.$$

Ответ. $\cos 2y$.

Пример 3. Вычислим $D = \dfrac{\sin 43^\circ \cos 17^\circ + \sin 17^\circ \cos 43^\circ}{\cos 72^\circ \cos 12^\circ + \sin 72^\circ \sin 12^\circ}$.

Решение. По формулам (1) и (4)

$$D = \frac{\sin(43^\circ + 17^\circ)}{\cos(72^\circ - 12^\circ)} = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Ответ. $\sqrt{3}$.

Пример 4. Сравним

$$\frac{\sin 47^\circ \cos 69^\circ + \sin 69^\circ \cos 47^\circ}{\cos 77^\circ \cos 39^\circ - \sin 77^\circ \sin 39^\circ} \text{ и } \frac{\sin 42^\circ + \cos 42^\circ}{\cos 21^\circ - \sin 21^\circ}.$$

Решение. Заметим, что

$$\frac{\sin 47^\circ \cos 69^\circ + \sin 69^\circ \cos 47^\circ}{\cos 77^\circ \cos 39^\circ - \sin 77^\circ \sin 39^\circ} = \frac{\sin(47^\circ + 69^\circ)}{\cos(77^\circ + 39^\circ)} =$$

$$= \frac{\sin 116^\circ}{\cos 116^\circ} = \operatorname{tg} 116^\circ < 0,$$

а так как $\sin 42^\circ + \cos 42^\circ > 0$ и $\cos 21^\circ - \sin 21^\circ > \cos 45^\circ - \sin 45^\circ = 0$, то $\frac{\sin 42^\circ + \cos 42^\circ}{\cos 21^\circ - \sin 21^\circ} > 0$.

Поэтому $\frac{\sin 47^\circ \cos 69^\circ + \sin 69^\circ \cos 47^\circ}{\cos 77^\circ \cos 39^\circ - \sin 77^\circ \sin 39^\circ} < \frac{\sin 42^\circ + \cos 42^\circ}{\cos 21^\circ - \sin 21^\circ}$.

Ответ. $\frac{\sin 47^\circ \cos 69^\circ + \sin 69^\circ \cos 47^\circ}{\cos 77^\circ \cos 39^\circ - \sin 77^\circ \sin 39^\circ} < \frac{\sin 42^\circ + \cos 42^\circ}{\cos 21^\circ - \sin 21^\circ}$.

Пример 5. Найдем наименьшее и наибольшее значения выражения $E = \cos x - \sqrt{3} \sin x$.

Решение. Преобразуем данное выражение по формуле (3):

$$E = \cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) =$$

$$= 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x - \sin x \cos\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right).$$

Так как $-1 \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \leqslant 1$, то наименьшее значение выражения E равно -2, а наибольшее 2.

Ответ. -2 и 2.

Пример 6. Вычислим $G = \cos(\arcsin 0{,}8 - \arccos(-0{,}6))$.

Решение. Обозначим $\alpha = \arcsin 0{,}8$, $\beta = \arccos(-0{,}6)$, тогда по формуле (1) имеем

$$G = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Так как $\sin\alpha = 0{,}8$, то $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - 0{,}8^2 = 0{,}36$. Так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha \geqslant 0$, поэтому $\cos\alpha = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.

Так как $\cos\beta = -0{,}6$, то $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - (-0{,}6)^2 = 0{,}64$. Так как $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, то $\sin\beta \geqslant 0$, поэтому $\sin\beta = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

Теперь вычислим $G = 0{,}6 \cdot (-0{,}6) + 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}28$.

Ответ. 0,28.

33. Формулы приведения для синуса и косинуса

Формулами приведения называют формулы, позволяющие привести аргументы $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $\frac{3\pi}{2}-\alpha$, $\frac{3\pi}{2}+\alpha$, $2\pi-\alpha$, $2\pi+\alpha$, $\frac{5\pi}{2}-\alpha$, $\frac{5\pi}{2}+\alpha$, $3\pi-\alpha$, $3\pi+\alpha$, ... к аргументу α.

Так как значения синуса и косинуса не изменяются от прибавления (вычитания) 2π к аргументу, то синус (косинус) любого из указанных выше аргументов нетрудно свести к синусу (косинусу) аргументов $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $\frac{3\pi}{2}-\alpha$, $\frac{3\pi}{2}+\alpha$, которые можно привести к аргументу α, применяя формулы синуса (косинуса) суммы (разности) двух углов.

Выпишем все 12 формул для указанных шести аргументов.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha.$$

Все эти формулы можно запомнить с помощью следующего мнемонического правила[1]. Для этого надо научиться определять: 1) надо ли заменять синус на косинус или косинус на синус; 2) надо ли в правой части формулы ставить знак «−».

1) Если первое слагаемое аргумента $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, то в правой части формулы надо заменить синус на косинус (косинус на синус). Если первое слагаемое аргумента π, то заменять синус (косинус) не надо.

[1] Мнемоническое правило — правило для запоминания (Мнемозина — богиня памяти у древних греков).

2) В правой части формулы надо поставить знак «−», только если для острого угла α значение синуса (косинуса) в левой части формулы отрицательно.

Пример 1. Вычислим $\cos\left(\frac{27\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(-21\pi-\alpha)$, если $\sin\alpha=-0{,}1$.

Решение. $\cos\left(\frac{27\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(-21\pi-\alpha)=\cos\left(12\pi+\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+$
$+\sin(-22\pi+\pi-\alpha)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)=A.$

Теперь можно применить или формулы косинуса суммы и синуса разности двух углов:

$$A=\cos\frac{3\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{3\pi}{2}\sin\alpha+\sin\pi\cos\alpha-\sin\alpha\cos\pi=$$
$$=0\cdot\cos\alpha-(-1)\cdot\sin\alpha+0\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot(-1)=$$
$$=\sin\alpha+\sin\alpha=2\sin\alpha,$$

или мнемоническое правило:

$$A=\sin\alpha+\sin\alpha=2\sin\alpha.$$

Так как $\sin\alpha=-0{,}1$, то $2\sin\alpha=2\cdot(-0{,}1)=-0{,}2$.
Ответ. $-0{,}2$.

Пример 2. Вычислим $\dfrac{2\sin(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)-4\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$, если $\mathrm{tg}\,\alpha=3$.

Решение. $\dfrac{2\sin(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi+\alpha)-4\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\dfrac{-2\sin\alpha-\cos\alpha}{-\cos\alpha+4\sin\alpha}.$

Так как $\mathrm{tg}\,\alpha=3$, то $\cos\alpha\neq0$. Разделим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{-2\sin\alpha-\cos\alpha}{-\cos\alpha+4\sin\alpha}$ на $\cos\alpha$ и вычислим значение полученного выражения: $\dfrac{-2\sin\alpha-\cos\alpha}{-\cos\alpha+4\sin\alpha}=\dfrac{-2\,\mathrm{tg}\,\alpha-1}{-1+4\,\mathrm{tg}\,\alpha}=$
$=\dfrac{-6-1}{-1+12}=-\dfrac{7}{11}.$

Ответ. $-\dfrac{7}{11}$.

34. Сумма и разность синусов и косинусов

Формулы суммы и разности синусов:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (1)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (2)$$

Формулы суммы и разности косинусов:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Пример 1. Запишем в виде произведения:
а) $A = \sin 80° + \sin 40°$; б) $B = \cos 80° - \cos 40°$.
Решение. а) По формуле (1)

$$A = 2\sin\frac{80° + 40°}{2}\cos\frac{80° - 40°}{2} =$$

$$= 2\sin 60°\cos 20° = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}\cos 20° = \sqrt{3}\cos 20°.$$

б) По формуле (4)

$$B = -2\sin\frac{80° + 40°}{2}\sin\frac{80° - 40°}{2} =$$

$$= -2\sin 60°\sin 20° = -\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}\sin 20° = -\sqrt{3}\sin 20°.$$

Ответ. а) $\sqrt{3}\cos 20°$; б) $-\sqrt{3}\sin 20°$.

Пример 2. Вычислим

$$C = \sin 130° - \sin 10° - \cos 100° - \cos 40°.$$

Решение. По формулам (2) и (3)

$$C = 2\sin\frac{130° - 10°}{2}\cos\frac{130° + 10°}{2} -$$

$$- 2\cos\frac{100° + 40°}{2}\cos\frac{100° - 40°}{2} =$$

$$= 2\sin 60°\cos 70° - 2\cos 70°\cos 30° =$$

$$= \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}\cos 70° - \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}\cos 70° = 0.$$

Ответ. 0.

Пример 3. Запишем в виде произведения:

$$D = \sin 31^\circ + \sin 25^\circ + \sin 19^\circ.$$

Решение. По формуле (1) $D = 2\sin\frac{31^\circ + 19^\circ}{2}\cos\frac{31^\circ - 19^\circ}{2} + \sin 25^\circ = 2\sin 25^\circ\cos 6^\circ + \sin 25^\circ = 2\sin 25^\circ\left(\cos 6^\circ + \frac{1}{2}\right) = 2\sin 25^\circ(\cos 6^\circ + \cos 60^\circ) = 2\sin 25^\circ \cdot 2\cos\frac{6^\circ + 60^\circ}{2}\cos\frac{6^\circ - 60^\circ}{2} = 4\sin 25^\circ\cos 33^\circ\cos 27^\circ$.

Ответ. $4\sin 25^\circ\cos 33^\circ\cos 27^\circ$.

35. Формулы синусов и косинусов двойных и половинных углов

Формулы синуса и косинуса двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \qquad (2)$$

Формулы синуса и косинуса половинного угла:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Пример 1. Вычислим $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{9}{41}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{9}{41}\right)^2 = \frac{1600}{1681}$. Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\sin\alpha < 0$, следовательно, $\sin\alpha = -\frac{40}{41}$. По формулам (1) и (2) имеем

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\left(-\frac{40}{41}\right)\cdot\left(-\frac{9}{41}\right) = \frac{720}{1681},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{81}{1681} - \frac{1600}{1681} = -\frac{1519}{1681}.$$

Ответ. $\sin 2\alpha = \frac{720}{1681}$, $\cos 2\alpha = -\frac{1519}{1681}$.

Пример 2. Докажем равенство

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} \ (\alpha \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}).$$

Решение. Запишем $\sin 2\alpha$ в виде дроби, затем разделим числитель и знаменатель дроби на $\sin^2\alpha$ ($\alpha \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$):

$$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha},$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Вычислим $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -0{,}28$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. По формулам (3) и (4)

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1+0{,}28}{2} = 0{,}64,$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{1-0{,}28}{2} = 0{,}36.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$, поэтому $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, а $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$, следовательно, $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$, а $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6$.

Ответ. $\sin\frac{\alpha}{2} = 0{,}8$, $\cos\frac{\alpha}{2} = -0{,}6$.

36. Произведения синусов и косинусов

Формулы произведений синусов и косинусов:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)), \qquad (1)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)), \qquad (2)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)). \qquad (3)$$

Пример 1. Запишем в виде суммы или разности:
а) $\sin 21^\circ\cos 9^\circ$; б) $\cos 32^\circ\cos 28^\circ$; в) $\sin 55^\circ\sin 25^\circ$.

Решение. Применяя последовательно формулы (1)—(3), имеем:

а) $\sin 21^\circ\cos 9^\circ = \frac{1}{2}(\sin 30^\circ + \sin 12^\circ) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin 12^\circ$;

б) $\cos 32° \cos 28° = \frac{1}{2}(\cos 60° + \cos 4°) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 4°$;

в) $\sin 55° \sin 25° = \frac{1}{2}(\cos 30° - \cos 80°) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\cos 80°$.

Ответ. а) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin 12°$; б) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 4°$; в) $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}\cos 80°$.

Пример 2. Вычислим:

а) $A = \sin 32° \cos 28° - \sin 17° \cos 13°$;

б) $B = \cos\frac{3\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16} - \sin\frac{7\pi}{16}\sin\frac{5\pi}{16}$.

Решение. а) По формуле (1) $A = \frac{1}{2}(\sin 60° + \sin 4°) - \frac{1}{2}(\sin 30° + \sin 4°) = \frac{1}{2}(\sin 60° + \sin 4° - \sin 30° - \sin 4°) = \frac{1}{2}(\sin 60° - \sin 30°) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

б) По формулам (2) и (3) $B = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{16}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{16} - \frac{\pi}{16}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{16} - \frac{5\pi}{16}\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{16} + \frac{5\pi}{16}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

Ответ. а) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$; б) 0.

37. Формулы для тангенсов

Формулы тангенса суммы и тангенса разности двух углов:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}, \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}. \qquad (2)$$

Формулы тангенса двойного и половинного углов:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad (3)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (4)$$

Примечание. Равенства (1)—(4) справедливы для всех таких углов α, для которых определены обе части этих равенств.

Пример 1. Вычислим $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$.

Решение. По формулам (1) и (2)

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{3+2}{6-1}=1,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{3-2}{6+1}=\frac{1}{7}.$$

Ответ. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=1$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{1}{7}$.

Пример 2. Вычислим $\frac{\operatorname{tg}97^\circ-\operatorname{tg}37^\circ}{1+\operatorname{tg}97^\circ\operatorname{tg}37^\circ}$.

Решение. По формуле (2)

$$\frac{\operatorname{tg}97^\circ-\operatorname{tg}37^\circ}{1+\operatorname{tg}97^\circ\operatorname{tg}37^\circ}=\operatorname{tg}(97^\circ-37^\circ)=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}.$$

Ответ. $\sqrt{3}$.

Пример 3. Вычислим $\operatorname{tg}4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}$.

Решение. По формуле (3)

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{8}{15},$$

$$\operatorname{tg}4\alpha=\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{8}{15}}{1-\frac{64}{225}}=\frac{240}{161}.$$

Ответ. $\frac{240}{161}$.

Пример 4. Вычислим $\operatorname{tg}15^\circ$.

Решение. I способ. По формуле (4)

$$\operatorname{tg}15^\circ=\frac{\sin30^\circ}{1+\cos30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}.$$

II способ. По формуле (2)

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(45° - 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 30°}{1 + \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = 2 - \sqrt{3}.$$

Ответ. $2 - \sqrt{3}$.

38. Тригонометрические функции

Пример 1. Задана функция $y = \sin 2x$. Укажем промежутки: а) возрастания; б) убывания этой функции.

Решение. Обозначив $\alpha = 2x$, рассмотрим функцию $y = \sin \alpha$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

а) Функция $y = \sin \alpha$ возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Так как $\alpha = 2x$, то для x справедливы двойные неравенства $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant 2x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ или $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Таким образом, функция $y = \sin 2x$ возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

б) Функция $y = \sin \alpha$ убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. Так как $\alpha = 2x$, то для x справедливы двойные неравенства $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant 2x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ или $\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Таким образом, функция $y = \sin 2x$ убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{3\pi}{4} + \pi n\right]$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. Промежутки возрастания: $\left[-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; промежутки убывания: $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{3\pi}{4} + \pi n\right]$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Определим наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 4\cos^2 2x + 3\sin^2 2x$.

Решение. Так как $f(x) = 4\cos^2 2x + 3\sin^2 2x = \cos^2 2x + 3(\cos^2 2x + \sin^2 2x) = \cos^2 2x + 3$, то из условия $0 \leqslant \cos^2 2x \leqslant 1$ следует, что $3 \leqslant \cos^2 2x + 3 \leqslant 4$. Это означает, что наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ равны соответственно 4 и 3 и достигаются во многих точках, например, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$, а $f(0) = 4$.

Пример 3. Построим график функции $f(x) = \frac{|\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x}{2}$.

Решение. Функция $f(x)$ определена для всех $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

1) Для тех x, при которых $\operatorname{tg} x \geqslant 0$, имеем $f(x) = \frac{|\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{2} = \operatorname{tg} x$. Поэтому для таких x график функции совпадает с графиком функции $y = \operatorname{tg} x$.

2) Для тех x, при которых $\operatorname{tg} x < 0$, имеем $f(x) = \frac{|\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x}{2} = \frac{-\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{2} = 0$. Поэтому для таких x график функции есть точки оси Ox (рис. 18).

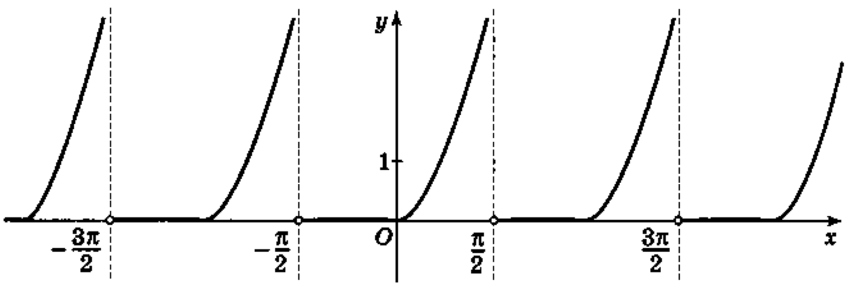

Рис. 18

39. Тригонометрические уравнения

Пример 1. Решим уравнение

$$8\sin x - 6\sin x\cos x + 3\cos x - 4 = 0. \qquad (1)$$

Решение. Разложим левую часть уравнения (1) на множители:

$$4(2\sin x - 1) - 3\cos x(2\sin x - 1) = 0,$$
$$(2\sin x - 1)(4 - 3\cos x) = 0. \qquad (2)$$

Все решения уравнения (2) являются решениями двух простейших уравнений:

$$1)\ \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad 2)\ \cos x = \frac{4}{3}.$$

Все решения уравнения 1) составляют две серии:

$$x_n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \quad x_m = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z},$$

а уравнение 2) не имеет решений, так как $\cos x \leqslant 1$ для любого x, а $\frac{4}{3} > 1$.

Следовательно, уравнение (1) имеет те же две серии решений, которые объединяют обычно в одну серию: $x_k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

40. Замена неизвестного при решении тригонометрических уравнений

Пример 1. Решим уравнение

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1. \tag{1}$$

Решение. Обозначив $\alpha = 3x - \frac{\pi}{2}$, перепишем уравнение (1) в виде $\sin\alpha = 1$, все решения которого составляют единственную серию $\alpha_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Теперь найдем все решения уравнения (1):

$$3x_n - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad 3x_n = \pi + 2\pi n, \quad x_n = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решим уравнение

$$\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0. \tag{2}$$

Решение. Уравнение (2) квадратное относительно $\cos x$. Обозначив $t = \cos x$, перепишем его в виде

$$t^2 - 4t + 3 = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет два корня $t_1 = 1$ и $t_2 = 3$, следовательно, множество решений уравнения (2) является объединением множеств решений двух уравнений:

$$1)\ \cos x = 1 \quad \text{и} \quad 2)\ \cos x = 3.$$

Все решения уравнения 1) составляют единственную серию $x_n = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а уравнение 2) не имеет решений, так как $3 > 1$, а $\cos x \leqslant 1$ для любого x.

Следовательно, уравнение (2) имеет единственную серию решений $x_n = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. Решим уравнение

$$\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 3 = 0. \qquad (4)$$

Решение. Обозначив $t = \operatorname{tg} x$, перепишем уравнение (4) в виде

$$t^3 - t^2 - 3t + 3 = 0. \qquad (5)$$

Разложив левую часть уравнения (5) на множители, перепишем его в виде

$$(t - 1)(t^2 - 3) = 0. \qquad (6)$$

Уравнение (6) имеет три корня $t_1 = 1$, $t_2 = -\sqrt{3}$ и $t_3 = \sqrt{3}$, следовательно, множество решений уравнения (4) есть объединение множеств решений трех уравнений:

$$1)\ \operatorname{tg} x = 1; \quad 2)\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}; \quad 3)\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

Все решения каждого из уравнений 1), 2) и 3) составляют единственную серию соответственно: $x_n = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x_m = -\frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$; $x_p = \frac{\pi}{3} + \pi p$, $p \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, все решения уравнения (4) составляют эти три серии.

Две последние серии решений можно объединить:

$$x_k = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

41. Применение тригонометрических формул при решении уравнений

Пример 1. Решим уравнение

$$\cos^2 \pi x + 4\sin \pi x + 4 = 0. \qquad (1)$$

Решение. Применяя основное тригонометрическое тождество, перепишем уравнение (1) в виде

$$\sin^2 \pi x - 4\sin \pi x - 5 = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) квадратное относительно $\sin \pi x$. Обозначив $t = \sin \pi x$, перепишем его в виде

$$t^2 - 4t - 5 = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет два корня $t_1 = -1$ и $t_2 = 5$, следовательно, множество решений уравнения (1) есть объединение множеств решений двух уравнений:

$$1)\ \sin \pi x = -1 \quad \text{и} \quad 2)\ \sin \pi x = 5.$$

Все решения уравнения 1) составляют единственную серию

$$\pi x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x_n = -\frac{1}{2} + 2n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

а уравнение 2) не имеет решений, так как $5 > 1$, а $\sin \pi x \leqslant 1$ для любого x.

Следовательно, уравнение (1) имеет единственную серию решений $x_n = -\frac{1}{2} + 2n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $-\frac{1}{2} + 2n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решим уравнение

$$\sin 2x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (4)$$

Решение. Применяя формулу синуса суммы двух углов, перепишем уравнение (4) в виде

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (5)$$

Обозначив $t = 3x + \frac{\pi}{3}$, перепишем уравнение (5) в виде

$$\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (6)$$

Уравнение (6) имеет две серии решений:

$$t_n = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \quad t_m = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Следовательно,

$$3x_n + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}; \quad 3x_m + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z},$$

откуда найдем две серии решений уравнения (5):

$$x_n = \frac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}; \quad x_m = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi m}{3},\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, уравнение (4) имеет те же серии решений.

Ответ. $\frac{2\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi m}{3},\ m \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. Решим уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x-\sin 2x=\frac{11}{8}. \qquad (7)$$

Решение. Перепишем уравнение (7) в виде

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-\sin 2x=\frac{11}{8},$$

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-\sin 2x=\frac{11}{8},$$

$$\sin^2 2x+2\sin 2x+\frac{3}{4}=0. \qquad (8)$$

Обозначив $t=\sin 2x$, перепишем уравнение (8) в виде

$$t^2+2t+\frac{3}{4}=0.$$

Это уравнение имеет два корня $t_1=-\frac{1}{2}$ и $t_2=-\frac{3}{2}$. Следовательно, множество решений уравнения (8) есть объединение множеств решений двух уравнений:

$$1)\ \sin 2x=-\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad 2)\ \sin 2x=-\frac{3}{2}.$$

Все решения уравнения 1) составляют две серии: $x_n=-\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$, и $x_m=-\frac{5\pi}{12}+\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}$, а уравнение 2) не имеет решений, так как $-\frac{3}{2}<-1$, а $\sin 2x\geqslant -1$ для любого x.

Следовательно, уравнение (7) имеет те же серии решений.

Ответ. $-\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z};\ -\frac{5\pi}{12}+\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}.$

42. Однородные уравнения

Пример 1. Решим уравнение

$$3\sin x-4\cos x=0. \qquad (1)$$

Решение. Уравнение (1) однородное первой степени, оно равносильно уравнению

$$3\operatorname{tg} x-4=0. \qquad (2)$$

Уравнение (2), а значит, и равносильное ему уравнение (1) имеет единственную серию решений $x_n=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

Пример 2. Решим уравнение

$$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0. \qquad (3)$$

Решение. Уравнение (3) однородное второй степени, оно равносильно уравнению

$$3\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 1 = 0. \qquad (4)$$

Так как уравнение $3t^2 - 4t + 1 = 0$ имеет два корня $t_1 = 1$ и $t_2 = \frac{1}{3}$, то все решения уравнения (4), а значит, и равносильного ему уравнения (3) являются объединением всех решений двух уравнений:

$$1)\ \operatorname{tg} x = 1 \quad \text{и} \quad 2)\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{3}.$$

Уравнение 1) имеет единственную серию решений $x_n = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а уравнение 2) имеет единственную серию решений $x_m = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. Определим, при каких a уравнение

$$5\sin^2 x + 4\sin x\cos x + a\cos^2 x = 0 \qquad (5)$$

не имеет решений.

Решение. Уравнение (5) однородное второй степени, оно равносильно уравнению

$$5\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + a = 0. \qquad (6)$$

Так как уравнение $5t^2 - 4t + a = 0$ не имеет корней при условии $D = 16 - 20a < 0$, то и уравнение (6), а значит, и равносильное ему уравнение (5) не имеют решений при том же условии, т. е. при $a > \frac{4}{5}$.

Ответ. $a > \frac{4}{5}$.

43*. Тригонометрические неравенства

Пример 1. Решим неравенство

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Решение. Обозначив $t = 2x - \frac{\pi}{6}$, перепишем неравенство (1) в виде

$$\sin t > \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

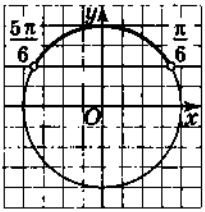

Рис. 19

Множество решений неравенства (2) есть серия интервалов $\frac{\pi}{6}+2\pi n<t<\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 19), поэтому все решения неравенства (1) найдем, решив серию двойных неравенств

$$\frac{\pi}{6}+2\pi n < 2x-\frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

откуда получим

$$\frac{\pi}{6}+\pi n < x < \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

т. е. множество всех решений неравенства (1) состоит из серии интервалов $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решим неравенство

$$4\sin^2 x-4\cos x-1 \geqslant 0. \tag{3}$$

Решение. Перепишем неравенство (3) в виде

$$4\cos^2 x+4\cos x-3 \leqslant 0. \tag{4}$$

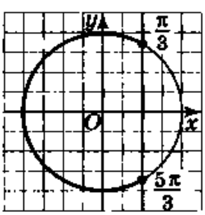

Рис. 20

Обозначим $\cos x=t$. Так как неравенство $4t^2+4t-3 \leqslant 0$ имеет множество решений $-\frac{3}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$, то все решения неравенства (3) найдем, решив двойное неравенство $-\frac{3}{2} \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{2}$.

Неравенство $-\frac{3}{2} \leqslant \cos x$ справедливо для любых x, а множество решений неравенства $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ есть серия промежутков $\frac{\pi}{3}+2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 20). Она и является множеством всех решений неравенства (3).

Ответ. $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. Определим все значения a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение неравенство

$$12\sin x+5\cos x \leqslant a. \tag{5}$$

Решение. Разделим неравенство (5) на число $\sqrt{12^2+5^2}=13$, получим неравенство

$$\frac{12}{13}\sin x+\frac{5}{13}\cos x\leqslant\frac{a}{13}, \tag{6}$$

равносильное неравенству (5).

Так как $\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2=1$, то существует такой угол α, что $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ и $\sin\alpha=\frac{5}{13}$. Перепишем неравенство (6) в виде

$$\sin(x+\alpha)\leqslant\frac{a}{13}.$$

Последнее неравенство, а значит и неравенство (5), имеет хотя бы одно решение при каждом a, таком, что $\frac{a}{13}\geqslant-1$, т. е. при каждом $a\geqslant-13$.

Ответ. $a\geqslant-13$.

44*. Введение вспомогательного угла. Замена $t=\sin x+\cos x$

Пример 1. Решим уравнение

$$3\sin x-4\cos x=5. \tag{1}$$

Решение. Разделив обе части уравнения (1) на число $\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$, получим уравнение

$$\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x=1, \tag{2}$$

равносильное уравнению (1).

Так как $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, то существует такой угол α, что $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ и $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. Поэтому уравнение (2) можно переписать в виде

$$\sin x\cos\alpha-\sin\alpha\cos x=1$$

или в виде

$$\sin(x-\alpha)=1. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет единственную серию решений $x_n-\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$, откуда $x_n=\alpha+\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. Так как $\alpha = \arcsin\frac{4}{5}$, то уравнение (3), а значит, и равносильное ему уравнение (1) имеет единственную серию решений $x_n = \arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решим уравнение

$$\sin x - 2\sin x\cos x + \cos x = -1. \tag{4}$$

Решение. Обозначив $t = \sin x + \cos x$, перепишем уравнение (4) в виде

$$t^2 - t - 2 = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет два корня $t_1 = -1$ и $t_2 = 2$, поэтому все решения уравнения (4) являются решениями или уравнения 1) $\sin x + \cos x = -1$, или уравнения 2) $\sin x + \cos x = 2$.

Все решения уравнения 1) найдем, введя вспомогательный угол и переписав уравнение 1) в виде уравнения

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

которое имеет две серии решений: $x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x_k = -\pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Введя вспомогательный угол, убеждаемся, что уравнение 2) не имеет решений, так как равенство $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ не выполняется ни при каком x.

Следовательно, уравнение (4) имеет те же две серии решений.

Ответ. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $-\pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. Решим неравенство

$$2\sin x\cos x + 2\cos^2 x > 1. \tag{6}$$

Решение. Применяя формулы синуса и косинуса двойного угла, перепишем неравенство (6) в виде:

$$\sin 2x + \cos 2x > 0. \tag{7}$$

Вводя вспомогательный угол, перепишем неравенство (7) в виде

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) > 0. \tag{8}$$

Множество решений неравенства (8) есть серия интервалов $2\pi k < 2x + \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, откуда найдем все решения неравенства (6): $-\frac{\pi}{8} + \pi k < x < \frac{3\pi}{8} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\left(-\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 4. Решим неравенство

$$\sin x - \cos x - 4 \sin x \cos x < 1. \qquad (9)$$

Решение. Обозначив $t = \sin x - \cos x$, перепишем неравенство (9) в виде:

$$2t^2 + t - 3 < 0. \qquad (10)$$

Неравенство (10) равносильно неравенству $-\frac{3}{2} < t < 1$, поэтому неравенство (9) равносильно неравенству

$$-\frac{3}{2} < \sin x - \cos x < 1. \qquad (11)$$

Вводя вспомогательный угол, перепишем неравенство (11) в виде

$$-\frac{3\sqrt{2}}{4} < \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (12)$$

Левое из неравенств (12) справедливо при любых x. Следовательно, неравенство (9) равносильно неравенству

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (13)$$

Множество решений неравенства (13) есть серия интервалов $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, откуда найдем все решения неравенства (9): $-\pi + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $\left(-\pi + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

45*. Замена неизвестных при решении систем уравнений

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2^x + 2^{\frac{x+5}{2} + y} = 40. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Выразив y через x из первого уравнения системы (1), подставим выражение $\frac{3x-7}{2}$ вместо y во второе уравнение системы (1) и решим полученное уравнение:

$$2^x + 2^{2x-1} - 40 = 0. \qquad (2)$$

Умножив уравнение (2) на 2 и обозначив $t = 2^x$, перепишем полученное уравнение в виде

$$t^2 + 2t - 80 = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет два корня $t_1 = -10$ и $t_2 = 8$, поэтому все корни уравнения (2) являются объединением всех корней уравнений 1) $2^x = -10$ и 2) $2^x = 8$. Так как уравнение 1) не имеет корней, а уравнение 2) имеет единственный корень $x_0 = 3$, то уравнение (2) имеет единственный корень $x_0 = 3$.

Подставив $x_0 = 3$ в равенство $y = \frac{3x-7}{2}$, найдем, что $y_0 = 1$.

Ответ. (3; 1).

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-2y}{2x-y} + 10x - 5y = 1 \\ 14 \cdot 15^{2x-y} + 15 = 15^{4x-2y}. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение. Обозначив $t = 15^{2x-y}$, перепишем второе уравнение системы (4) в виде

$$t^2 - 14t - 15 = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) имеет два корня $t_1 = -1$ и $t_2 = 15$, поэтому все решения системы (4) являются объединением всех решений двух систем:

$$1) \begin{cases} \dfrac{x-2y}{2x-y} + 10x - 5y = 1 \\ 15^{2x-y} = -1 \end{cases} \text{ и } 2) \begin{cases} \dfrac{x-2y}{2x-y} + 10x - 5y = 1 \\ 15^{2x-y} = 15. \end{cases}$$

Так как второе уравнение системы 1) не имеет решений, то система (4) равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{x-2y}{2x-y} + 10x - 5y = 1 \\ 2x - y = 1. \end{cases} \qquad (6)$$

Решив систему (6), получим единственное ее решение (2; 3).

Ответ. (2; 3).

Пример 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4\sin x - \cos y = 1 \\ 2\sin x + \cos y = 2. \end{cases} \qquad (7)$$

Решение. Обозначив $u = \sin x$, $v = \cos y$, перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} 4u - v = 1 \\ 2u + v = 2. \end{cases} \qquad (8)$$

Система линейных уравнений (8) имеет единственное решение $u_0 = \frac{1}{2}$ и $v_0 = 1$, поэтому все решения системы (7) являются решениями системы

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos y = 1. \end{cases} \qquad (9)$$

Первое уравнение системы (9) имеет единственную серию решений $x_n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а второе уравнение — единственную серию $y_k = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, поэтому решениями системы (7) являются все пары чисел $(x_n;\ y_k)$, где $x_n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $y_k = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $(x_n;\ y_k)$, где $x_n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $y_k = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

З а м е ч а н и е. Обратим внимание на тот факт, что выражение x_n и y_k через одно и то же целое число в виде $x_n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $y_n = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, привело бы к потере корней, так как для каждого значения n числу x_n соответствует бесконечное множество чисел y_k, а не единственное число y_n.

Самостоятельные работы

С—1 Действительные числа

I вариант

1. Запишите конечные десятичные дроби 0,3; 1,6; 2,25 в виде обыкновенных дробей.
2. Запишите обыкновенные дроби $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{3}$ в виде десятичных дробей (конечных или бесконечных).
3. Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:
а) 0,(4); б) 2,(17); в) 0,2(54).
4. Может ли разность двух иррациональных чисел быть рациональным числом?
5. Найдите все действительные числа x, для каждого из которых справедливо равенство:
а) $|x-3|=1$; б) $|2x+5|=3$.
6. Найдите все действительные числа x, для каждого из которых справедливо неравенство:
а) $|x-1|>2$; б) $|x+3|\leqslant 4$.

II вариант

1. Запишите конечные десятичные дроби 0,7; 1,4; 2,75 в виде обыкновенных дробей.
2. Запишите обыкновенные дроби $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{5}{3}$ в виде десятичных дробей (конечных или бесконечных).
3. Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:
а) 0,(5); б) 2,(13); в) 0,4(45).
4. Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом?
5. Найдите все действительные числа x, для каждого из которых справедливо равенство:
а) $|x-1|=3$; б) $|2x+3|=5$.
6. Найдите все действительные числа x, для каждого из которых справедливо неравенство:
а) $|x-3|<1$; б) $|x+5|\geqslant 2$.

III вариант

1. Запишите конечные десятичные дроби 0,6; 1,3; 2,05 в виде обыкновенных дробей.
2. Запишите обыкновенные дроби $\frac{3}{25}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{3}{11}$ в виде десятичных дробей (конечных или бесконечных).
3. Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:
   а) 0,(8); б) 2,(42); в) 0,16(8).
4. Может ли произведение двух иррациональных чисел быть рациональным числом?
5. Найдите все действительные числа x, для каждого из которых справедливо равенство:
   а) $|x+3|=4$; б) $|2x-7|=3$.
6. Найдите все действительные числа x, для каждого из которых справедливо неравенство:
   а) $|x-4|<2$; б) $|4x+3|\geqslant 7$.

IV вариант

1. Запишите конечные десятичные дроби 0,8; 1,2; 3,04 в виде обыкновенных дробей.
2. Запишите обыкновенные дроби $\frac{3}{20}$; $\frac{11}{8}$; $\frac{4}{11}$ в виде десятичных дробей (конечных или бесконечных).
3. Запишите периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:
   а) 0,(7); б) 2,(24); в) 0,18(6).
4. Может ли частное двух иррациональных чисел быть рациональным числом?
5. Найдите все действительные числа x, для каждого из которых справедливо равенство:
   а) $|x+4|=3$; б) $|2x-3|=7$.
6. Найдите все действительные числа x, для каждого из которых справедливо неравенство:
   а) $|x-2|>3$; б) $|4x+7|\leqslant 3$.

С–2 Применение формул сокращенного умножения

I вариант

1. Вычислите значение многочлена $x^2-2xy+y^2$ при $x=14\frac{11}{12}$, $y=8\frac{11}{12}$.
2. Найдите значение выражения $(6{,}375)^2-(7{,}375)^2$.

3. Из многочленов $A = 5x^2 + 4x - 3$ и $B = -5x^2 - 2x + 3$ составлено выражение $P = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$. Найдите значение выражения $P(x)$ при $x = 0{,}5$.
4. Найдите значение выражения $\dfrac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2} - \dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$ при $y = -0{,}25$.

II вариант

1. Вычислите значение многочлена $x^2 + 2xy + y^2$ при $x = 15\dfrac{12}{13}$, $y = -9\dfrac{12}{13}$.
2. Найдите значение выражения $(5{,}255)^2 - (6{,}255)^2$.
3. Из многочленов $A = 3x^2 + x + 11$ и $B = 3x^2 - 2x + 11$ составлено выражение $P = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$. Найдите значение выражения $P(x)$ при $x = 0{,}1$.
4. Найдите значение выражения $\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2} + \dfrac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}$ при $x = 0{,}35$.

III вариант

1. Вычислите значение многочлена $x^2 - 4xy + 4y^2$ при $x = 14\dfrac{16}{17}$, $y = 5\dfrac{8}{17}$.
2. Найдите значение выражения $(5{,}666)^2 - 4 \cdot (3{,}333)^2$.
3. Из многочленов $A = 3x^2 + 7x - 1$ и $B = -3x^2 - 5x + 1$ составлено выражение $P = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$. Найдите значение выражения $P(x)$ при $x = 0{,}2$.
4. Найдите значение выражения $\dfrac{27x^3+y^3}{9x^2-3xy+y^2} - \dfrac{27x^3-y^3}{9x^2+3xy+y^2}$ при $y = 0{,}5$.

IV вариант

1. Вычислите значение многочлена $x^2 + 6xy + 9y^2$ при $x = 17\dfrac{11}{14}$, $y = -4\dfrac{11}{42}$.
2. Найдите значение выражения $(8{,}11)^2 - 4 \cdot (4{,}555)^2$.
3. Из многочленов $A = 7x^2 + 5x - 10$ и $B = 7x^2 + 2x - 10$ составлено выражение $P = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$. Найдите значение выражения $P(x)$ при $x = 0{,}1$.
4. Найдите значение выражения $\dfrac{8x^3+y^3}{4x^2-2xy+y^2} + \dfrac{8x^3-y^3}{4x^2+2xy+y^2}$ при $x = -0{,}5$.

С–3 Квадратное уравнение. Формулы Виета

I вариант

1. Решите квадратное уравнение:
   а) $2x^2 - 7x + 3 = 0$; б) $x^2 - 4x + 4 = 0$; в) $3x^2 + 2x + 1 = 0$.
2. Верно ли, что число $x_1 = 1$ является корнем уравнения:
   а) $x^2 - 100x + 99 = 0$; б) $x^2 + 3x - 4 = 0$; в) $2x^2 - 3x + 1 = 0$?
   Если да, то найдите корень x_2 и разложите квадратный трехчлен в левой части уравнения на линейные множители.
3. Если квадратное уравнение $x^2 - 12x + 2 = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то, не вычисляя их, найдите значение числового выражения $(x_1 - x_2)^2$.

II вариант

1. Решите квадратное уравнение:
   а) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $x^2 - 6x + 9 = 0$; в) $2x^2 + 3x + 2 = 0$.
2. Верно ли, что число $x_1 = 1$ является корнем уравнения:
   а) $x^2 + 100x - 101 = 0$; б) $x^2 - 4x + 3 = 0$; в) $3x^2 - 4x + 1 = 0$?
   Если да, то найдите корень x_2 и разложите квадратный трехчлен в левой части уравнения на линейные множители.
3. Если квадратное уравнение $x^2 - 13x - 3 = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то, не вычисляя их, найдите значение числового выражения $x_1^2 + x_2^2$.

III вариант

1. Решите квадратное уравнение:
   а) $2x^2 - 5x - 3 = 0$; б) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; в) $5x^2 - 4x + 1 = 0$
   .
2. Верно ли, что число $x_1 = -1$ является корнем уравнения:
   а) $x^2 + 100x + 99 = 0$; б) $x^2 - 5x - 6 = 0$; в) $2x^2 + 5x + 3 = 0$
   ?
   Если да, то найдите корень x_2 и разложите квадратный трехчлен в левой части уравнения на линейные множители.
3. Если квадратное уравнение $x^2 - 12x + 4 = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то, не вычисляя их, найдите значение числового выражения $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$.

IV вариант

1. Решите квадратное уравнение:
а) $3x^2-5x-2=0$; б) $9x^2-6x+1=0$; в) $2x^2-3x+4=0$.
2. Верно ли, что число $x_1=-1$ является корнем уравнения:
а) $x^2-100x-101=0$; б) $x^2+6x+5=0$; в) $3x^2+5x+2=0$?
Если да, то найдите корень x_2 и разложите квадратный трехчлен в левой части уравнения на линейные множители.
3. Если квадратное уравнение $x^2-12x+2=0$ имеет корни x_1 и x_2, то, не вычисляя их, найдите значение числового выражения $x_1^3+x_2^3$.

С—4 Алгебраические дроби

I вариант

1. а) Сократите дробь $\dfrac{x^3+7x^2+16x+12}{x^3+5x^2+8x+4}$.
б) Найдите значение полученной дроби при $x=-2$.
2. а) Запишите в виде дроби выражение
$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\ldots+\frac{1}{(x+9)(x+10)}.$$
б) Найдите значение полученной дроби при $x=-1$.
3. Упростите выражение
$$\left(\frac{x^3+8}{x^3-2x^2+4x}-\frac{8x^3+1}{4x^2-2x+1}\right):\left(\frac{8x^3-1}{4x^2+2x+1}+\frac{x^3-8}{x^3+2x^2+4x}\right).$$

II вариант

1. а) Сократите дробь $\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-x^2-5x-3}$.
б) Найдите значение полученной дроби при $x=-1$.
2. а) Запишите в виде дроби выражение
$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\ldots+\frac{1}{(x+10)(x+11)}.$$
б) Найдите значение полученной дроби при $x=-10$.
3. Упростите выражение
$$\left(\frac{x^3+8}{x^3-2x^2+4x}+\frac{8x^3-1}{4x^2+2x+1}\right):\left(\frac{8x^3+1}{4x^2-2x+1}-\frac{x^3-8}{x^3+2x^2+4x}\right).$$

III вариант

1. а) Сократите дробь $\dfrac{x^3+4x^2-9x-36}{x^3+2x^2-11x-12}$.

   б) Найдите значение полученной дроби при $x = 3$.

2. а) Запишите в виде дроби выражение

$$\frac{1}{(x+11)(x+12)}+\frac{1}{(x+12)(x+13)}+\ldots+\frac{1}{(x+21)(x+22)}.$$

   б) Найдите значение полученной дроби при $x = -12$.

3. Упростите выражение

$$\left(\frac{1+8y^3}{1-2y+4y^2}-\frac{8+y^3}{4y-2y^2+y^3}\right):\left(\frac{8-y^3}{4y+2y^2+y^3}+\frac{1-8y^3}{1+2y+4y^2}\right).$$

IV вариант

1. а) Сократите дробь $\dfrac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3-2x^2-9x+18}$.

   б) Найдите значение полученной дроби при $x = 2$.

2. а) Запишите в виде дроби выражение

$$\frac{1}{(x+10)(x+11)}+\frac{1}{(x+11)(x+12)}+\ldots+\frac{1}{(x+20)(x+21)}.$$

   б) Найдите значение полученной дроби при $x = -11$.

3. Упростите выражение

$$\left(\frac{1+8y^3}{1-2y+4y^2}+\frac{8-y^3}{4y+2y^2+y^3}\right):\left(\frac{8+y^3}{4y-2y^2+y^3}-\frac{1-8y^3}{1+2y+4y^2}\right).$$

С—5 Рациональные уравнения

I вариант

Решите уравнение (1—3).

1. а) $\dfrac{x^2-9}{x^3+2x^2+9}=0$; б) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x}{x-2}=1$.

2. а) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{4x+5}{x^2+3x+2}=0$; б) $\dfrac{x^2}{x-2}-\dfrac{15}{x^2+x-6}+\dfrac{x}{x+3}=x$.

3. $\dfrac{x^2-2x}{x-6}+\dfrac{12}{x-5}+\dfrac{96}{x^2-11x+30}=x+1$.

II вариант

Решите уравнение (1—3).

1. а) $\dfrac{x^2-16}{x^3+3x^2+16}=0;$ б) $\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{x}{x-4}=1.$

2. а) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{4x+6}{x^2+4x+3}=0;$ б) $\dfrac{x^2}{x-3}-\dfrac{45}{x^2-x-6}+\dfrac{x}{x+2}=x.$

3. $\dfrac{x^2-3x}{x-4}+\dfrac{12}{x-5}+\dfrac{24}{x^2-9x+20}=x-1.$

III вариант

Решите уравнение (1—3).

1. а) $\dfrac{x^2-25}{x^3+4x^2+25}=0;$ б) $\dfrac{x-1}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}=1.$

2. а) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{3x-8}{x^2-5x+6}=0;$

   б) $\dfrac{(x+1)^2}{x-1}-\dfrac{20}{x^2+3x-4}+\dfrac{x+1}{x+4}=x+1.$

3. $\dfrac{x^2-3x}{x-6}-\dfrac{16}{x+5}-\dfrac{186}{x^2-x-30}=x+2.$

IV вариант

Решите уравнение (1—3).

1. а) $\dfrac{x^2-36}{x^3+5x^2+36}=0;$ б) $\dfrac{x-1}{x-6}-\dfrac{6}{x-4}=1.$

2. а) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{4x-5}{x^2-3x+2}=0;$

   б) $\dfrac{(x-1)^2}{x-4}-\dfrac{10}{x^2-3x-4}+\dfrac{x-1}{x+1}=x-1.$

3. $\dfrac{x^2+3x}{x+6}-\dfrac{16}{x-5}+\dfrac{186}{x^2+x-30}=x-2.$

С—6* Замена неизвестного при решении рациональных уравнений

I вариант

Решите уравнение (1—2).

1. а) $x^4-10x^2+9=0;$

   б) $(x+97)^2+34(x+97)+120=0;$

в) $(x^2-4x)^2+15(x^2-4x)+36=0$;
г) $x(x+2)(x+3)(x+5)=72$.

2. а) $x^2+6x-2-\dfrac{35}{x^2+6x}=0$; б) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+3x+5}+\dfrac{x^2+3x+5}{x^2-x+1}=2$.

II вариант

Решите уравнение (1—2).

1. а) $x^4-17x^2+16=0$;
б) $(x+79)^2+43(x+79)+120=0$;
в) $(x^2-3x)^2+18(x^2-3x)+32=0$;
г) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

2. а) $x^2-5x-2-\dfrac{24}{x^2-5x}=0$; б) $\dfrac{x^2+3x-3}{x^2-4x-7}+\dfrac{x^2-4x-7}{x^2+3x-3}=-2$.

III вариант

Решите уравнение (1—2).

1. а) $x^4-13x^2+36=0$;
б) $(x+93)^2+35(x+93)+150=0$;
в) $(2x^2-3x)^2+7(2x^2-3x)-18=0$;
г) $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)=3$.

2. а) $2x^2-3x-16+\dfrac{28}{2x^2-3x}=0$;
б) $\dfrac{x^2-4x+1}{x^2+x-1}+9\cdot\dfrac{x^2+x-1}{x^2-4x+1}=6$.

IV вариант

Решите уравнение (1—2).

1. а) $x^4-37x^2+36=0$;
б) $(x+86)^2+44(x+86)+160=0$;
в) $(3x^2-2x)^2+16(3x^2-2x)-17=0$;
г) $(x+1)(x+4)(x+6)(x+9)=100$.

2. а) $3x^2-2x-13+\dfrac{40}{3x^2-2x}=0$;
б) $\dfrac{x^2+4x+1}{x^2-x-5}+9\cdot\dfrac{x^2-x-5}{x^2+4x+1}=-6$.

С—7* Доказательство числовых неравенств

I вариант

Докажите справедливость неравенства (1—4).

1. $x^8-6x^4+10>0$ для любого действительного числа x.
2. $\frac{a+1}{a+2}<\frac{a+5}{a+6}$ для любого положительного числа a.
3. $x^2-6x+\frac{1}{x^2-6x+10}\geqslant -8$ для любого действительного числа x.
4. а) $\frac{20}{21}\cdot\frac{22}{23}\cdot\frac{24}{25}\cdot\ldots\cdot\frac{1998}{1999}<\frac{1}{10}$; б) $\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{78}{79}<\frac{1}{3}$.

II вариант

Докажите справедливость неравенства (1—4).

1. $x^6-8x^3+17>0$ для любого действительного числа x.
2. $\frac{a+2}{a+3}<\frac{a+4}{a+5}$ для любого положительного числа a.
3. $x^2-8x+\frac{1}{x^2-8x+17}\geqslant -15$ для любого действительного числа x.
4. а) $\frac{19}{20}\cdot\frac{21}{22}\cdot\frac{23}{24}\cdot\ldots\cdot\frac{2097}{2098}<\frac{1}{10}$; б) $\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{189}{190}<\frac{1}{4}$.

III вариант

Докажите справедливость неравенства (1—4).

1. $16x^8-8x^4+3>0$ для любого действительного числа x.
2. $\frac{a+4}{a+5}<\frac{a+5}{a+6}$ для любого положительного числа a.
3. $(a^2+1)(a^6+1)(a^{12}+1)\geqslant 8a^{10}$ для любого действительного числа a.
4. а) $\frac{12}{13}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{17}\cdot\ldots\cdot\frac{1200}{1201}<\frac{1}{10}$; б) $\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{10}{11}\cdot\ldots\cdot\frac{31}{32}<\frac{1}{2}$.

IV вариант

Докажите справедливость неравенства (1—4).

1. $9x^6-6x^3+2>0$ для любого действительного числа x.
2. $\frac{a+3}{a+4}<\frac{a+4}{a+5}$ для любого положительного числа a.

3. $(a^2+1)(a^4+1)(a^6+1) \geqslant 8a^6$ для любого действительного числа a.
4. а) $\frac{11}{12} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{15}{16} \cdot \ldots \cdot \frac{1099}{1100} < \frac{1}{10}$; б) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots \cdot \frac{128}{129} < \frac{1}{4}$.

С–8* Метод математической индукции

I вариант

1. Докажите формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1)d$ методом математической индукции.
2. Докажите, что $3^{n+2} + 2^{3n}$ делится на 5 для любого натурального числа n.
3. Докажите, что для любого натурального числа n справедливо равенство
$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n+1)(n+2) = \frac{n(n^2+6n+11)}{3}.$$

II вариант

1. Докажите формулу n-го члена геометрической прогрессии $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ методом математической индукции.
2. Докажите, что $5^{n+1} + 2^{3n}$ делится на 3 для любого натурального числа n.
3. Докажите, что для любого натурального числа n справедливо равенство
$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \ldots + n(2n+1) = \frac{n(4n^2+9n+5)}{6}.$$

III вариант

1. Докажите формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d) \cdot n}{2}$ методом математической индукции.
2. Докажите, что $4^{n+1} + 3^{2n}$ делится на 5 для любого натурального числа n.
3. Докажите, что для любого натурального числа n справедливо равенство $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{2n+4}$.

IV вариант

1. Докажите формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$ методом математической индукции.

2. Докажите, что $3^{n+1}+4^{2n-1}$ делится на 13 для любого натурального числа n.
3. Докажите, что для любого натурального числа n справедливо равенство $\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\ldots+\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{n}{4n+4}$.

С—9 Перестановки, размещения, сочетания

I вариант

1. Сколькими способами можно расставить 7 книг на полке?
2. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 (без повторения)?
3. Сколькими способами из 25 человек можно выбрать трех дежурных?
4. Сколькими способами из четырех мальчиков и пяти девочек можно выбрать дежурных — три мальчика и две девочки?
5. Вычислите: а) P_6; б) A_9^3; в) C_{10}^4.
6. Докажите, что для любых натуральных чисел k и n $(1 \leqslant k \leqslant n)$ справедливо равенство $C_n^k \cdot \frac{n+1}{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$.

II вариант

1. Шесть друзей купили шесть билетов в кино. Сколькими способами они могут занять свои шесть мест в кинозале?
2. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 2, 3, 4, 5, 6 (без повторения)?
3. Сколькими способами из 24 человек можно выбрать трех дежурных?
4. Сколькими способами из четырех мальчиков и пяти девочек можно выбрать дежурных — два мальчика и три девочки?
5. Вычислите: а) P_7; б) A_7^4; в) C_{12}^3.
6. Докажите, что для любых натуральных чисел k и n $(1 \leqslant k \leqslant n)$ справедливо равенство $(k+1)\cdot C_{n+1}^{k+1}=(n+1)\cdot C_n^k$.

III вариант

1. Сколько различных восьмизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (без повторения)?
2. Сколькими способами из 12 членов правления кооператива можно выбрать председателя, казначея и секретаря?

3. Сколькими способами из 15 человек можно выбрать 12 человек для участия в соревнованиях?
4. В магазине имеется 5 различных авторучек и 6 различных блокнотов. Сколькими способами можно выбрать для подарков 3 авторучки и 2 блокнота?
5. Вычислите: а) P_9; б) A_8^5; в) C_{12}^9.
6. Докажите, что для любых натуральных чисел k и n $(1 \leqslant k \leqslant n)$ справедливо равенство $C_{n-1}^{k-1} \cdot \frac{n}{k} = C_n^k$.

IV вариант

1. Сколько различных семизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (без повторения)?
2. Из восьми членов организации нужно выбрать председателя, казначея и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
3. Сколькими способами из 20 книг можно выбрать 16 книг?
4. В магазине имеется 5 различных авторучек и 6 различных блокнотов. Сколькими способами можно выбрать для подарков 2 авторучки и 3 блокнота?
5. Вычислите: а) P_8; б) A_9^4; в) C_{11}^8.
6. Докажите, что для любых натуральных чисел k и n $(1 \leqslant k \leqslant n)$ справедливо равенство $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$.

С—10 Формула бинома Ньютона

I вариант

1. Разложите по формуле бинома Ньютона:
   а) $(x-1)^5$; б) $(x+2)^4$.
2. Вычислите коэффициент при a^4 в разложении выражения $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{10}$ по формуле бинома Ньютона.
3. Вычислите сумму коэффициентов
$$C_9^0 + C_9^1 + C_9^2 + C_9^3 + \ldots + C_9^9.$$
4. Сколько рациональных членов содержит разложение $(\sqrt{3}+\sqrt{7})^{100}$ по формуле бинома Ньютона?

II вариант

1. Разложите по формуле бинома Ньютона:
   а) $(x+1)^5$; б) $(x-3)^4$.
2. Вычислите коэффициент при a^3 в разложении выражения $\left(a+\frac{1}{a}\right)^9$ по формуле бинома Ньютона.
3. Вычислите сумму коэффициентов
   $$C_{10}^0+C_{10}^1+C_{10}^2+C_{10}^3+\ldots+C_{10}^{10}.$$
4. Сколько рациональных членов содержит разложение $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^{102}$ по формуле бинома Ньютона?

III вариант

1. Разложите по формуле бинома Ньютона:
   а) $(x-1)^6$; б) $(x+2)^5$.
2. Вычислите коэффициент при a^5 в разложении выражения $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{11}$ по формуле бинома Ньютона.
3. Вычислите сумму коэффициентов
   $$C_{12}^0+C_{12}^1+C_{12}^2+C_{12}^3+\ldots+C_{12}^{12}.$$
4. Сколько рациональных членов содержит разложение $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^{1000}$ по формуле бинома Ньютона?

IV вариант

1. Разложите по формуле бинома Ньютона:
   а) $(x+1)^6$; б) $(x-3)^5$.
2. Вычислите коэффициент при a^6 в разложении выражения $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{12}$ по формуле бинома Ньютона.
3. Вычислите сумму коэффициентов
   $$C_{11}^0+C_{11}^1+C_{11}^2+C_{11}^3+\ldots+C_{11}^{11}.$$
4. Сколько рациональных членов содержит разложение $(\sqrt{7}+\sqrt{2})^{1002}$ по формуле бинома Ньютона?

Деление многочленов. Корень многочлена

I вариант

1. Разделите уголком многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, укажите неполное частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$, если:
   а) $A(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 2$, $B(x) = x^2 - x - 1$;
   б) $A(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$, $B(x) = x^2 + x - 2$.
2. С помощью схемы Горнера разделите многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, укажите неполное частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$, если $A(x) = 4x^4 - 5x^2 - 14$, $B(x) = x + 2$.
3. С помощью теоремы Безу определите остаток $R(x)$ от деления многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$, если:
   а) $A(x) = 3x^3 - 4x^2 - 2x + 1$, $B(x) = x - 1$;
   б) $A(x) = (x + 2)^9$, $B(x) = x + 1$.
4. Многочлен $P_3(x) = x^3 + ax^2 + bx + 12$ при делении на $(x - 1)$ дает в остатке 6, а при делении на $(x + 1)$ дает в остатке 12. Определите коэффициенты a и b.
5. Решите уравнение:
   а) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$; б) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$.

II вариант

1. Разделите уголком многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, укажите неполное частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$, если:
   а) $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x - 4$, $B(x) = x^2 + x - 2$;
   б) $A(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$, $B(x) = x^2 + x - 2$.
2. С помощью схемы Горнера разделите многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, укажите неполное частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$, если $A(x) = 3x^4 - 6x^2 - 15$, $B(x) = x - 2$.
3. С помощью теоремы Безу определите остаток $R(x)$ от деления многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$, если:
   а) $A(x) = 5x^3 - 4x^2 - 12x - 3$, $B(x) = x + 1$;
   б) $A(x) = (x - 1)^9$, $B(x) = x - 2$.
4. Многочлен $P_3(x) = x^3 + ax^2 + bx + 12$ при делении на $(x - 1)$ дает в остатке -12, а при делении на $(x + 1)$ дает в остатке -6. Определите коэффициенты a и b.
5. Решите уравнение:
   а) $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = 0$; б) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$.

III вариант

1. Разделите уголком многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, укажите неполное частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$, если:
   а) $A(x) = 5x^3 - 4x^2 + 8x - 2$, $B(x) = x^2 - 2x + 3$;
   б) $A(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 12x + 24$, $B(x) = x^2 - 3x + 2$.
2. С помощью схемы Горнера разделите многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, укажите неполное частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$, если $A(x) = 4x^4 - 13x^2 + x$, $B(x) = x - 2$.
3. С помощью теоремы Безу определите остаток $R(x)$ от деления многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$, если:
   а) $A(x) = 6x^3 + 5x^2 - 6x + 16$, $B(x) = x + 2$;
   б) $A(x) = (x - 2)^9$, $B(x) = x - 1$.
4. Многочлен $P_3(x) = x^3 + ax^2 + bx - 18$ при делении на $(x + 2)$ дает в остатке 20, а на $(x - 3)$ делится без остатка. Определите коэффициенты a и b.
5. Решите уравнение:
   а) $3x^3 + 4x^2 - 17x - 6 = 0$;
   б) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$.

IV вариант

1. Разделите уголком многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, укажите неполное частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$, если:
   а) $A(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 3$, $B(x) = x^2 + 2x - 3$;
   б) $A(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 12x + 24$, $B(x) = x^2 + 3x + 2$.
2. С помощью схемы Горнера разделите многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, укажите неполное частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$, если $A(x) = 4x^4 - 12x^2 + 13x$, $B(x) = x + 2$.
3. С помощью теоремы Безу определите остаток $R(x)$ от деления многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$, если:
   а) $A(x) = 6x^3 - 5x^2 - 6x - 16$, $B(x) = x - 2$;
   б) $A(x) = (x + 1)^9$, $B(x) = x + 2$.
4. Многочлен $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ при делении на $(x - 1)$ дает в остатке -12, а на $(x - 3)$ делится без остатка. Определите коэффициенты a и b.
5. Решите уравнение:
   а) $3x^3 - 14x^2 + 13x + 6 = 0$;
   б) $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0$.

I вариант

Решите неравенство (1—2).

1. а) $(x-2)(x+3)(x-4)>0$; б) $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-5)^2}\leqslant 0$.

2. а) $\frac{2x-1}{x+3}\geqslant 1$; б) $\frac{x}{x+3}-\frac{3}{x-1}+\frac{13}{x^2+2x-3}\leqslant 0$.

3. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2-x-12<0 \\ x^2-4x+3\geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+x-2\geqslant 0 \\ \frac{x+2}{x-4}\leqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x|\leqslant 2 \\ x^2-x-6\geqslant 0. \end{cases}$

II вариант

Решите неравенство (1—2).

1. а) $(x+2)(x-3)(x-4)<0$; б) $\frac{(x+5)(x-2)}{(x-1)^2}\geqslant 0$.

2. а) $\frac{2x+1}{x-3}\leqslant 1$; б) $\frac{x}{x-4}+\frac{5}{x-1}+\frac{24}{x^2-5x+4}\leqslant 0$.

3. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2+x-2>0 \\ x^2-x-12\leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+2x-3\geqslant 0 \\ \frac{x+3}{x-2}\leqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x|\geqslant 4 \\ x^2-x-12\leqslant 0. \end{cases}$

III вариант

Решите неравенство (1—2).

1. а) $(x+2)(x+3)(x-4)>0$; б) $\frac{(x+1)(x+2)^2}{x-3}\leqslant 0$.

2. а) $\frac{3x+1}{x-3}\geqslant -1$; б) $\frac{x-1}{x-4}-\frac{3}{x+2}-\frac{9}{x^2-2x-8}\geqslant 0$.

3. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2+x-12<0 \\ x^2-x-2\geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-2x-8\geqslant 0 \\ \frac{x-4}{x+3}\leqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x-1|\leqslant 4 \\ x^2+x-30\geqslant 0. \end{cases}$

IV вариант

Решите неравенство (1—2).

1. а) $(x+2)(x-3)(x+4)<0$; б) $\dfrac{(x+3)^2(x-2)}{x+4} \geqslant 0$.

2. а) $\dfrac{3x-1}{x+3} \leqslant -1$; б) $\dfrac{x+3}{x-3}-\dfrac{8}{x+1}-\dfrac{23}{x^2-2x-3} \geqslant 0$.

3. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2-7x+12>0 \\ x^2-4x-5 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-2x-3 \geqslant 0 \\ \dfrac{x-3}{x+4} \leqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x+1| \geqslant 6 \\ x^2+x-30 \leqslant 0. \end{cases}$

С—13* Замена неизвестного при решении рациональных неравенств

I вариант

Решите неравенство (1—3).

1. $(x^2+2x)^2-2(x+1)^2-1 \leqslant 0$. 2. $(x+2)(x+4)^2(x+6) \leqslant -3$.

3. $x^2-x-8+\dfrac{12}{x^2-x} \geqslant 0$.

II вариант

Решите неравенство (1—3).

1. $(x^2-4x)^2-(x-2)^2-16 \leqslant 0$. 2. $(x+1)(x+6)^2(x+11) \leqslant -24$.

3. $x^2+x-8+\dfrac{12}{x^2+x} \geqslant 0$.

III вариант

Решите неравенство (1—3).

1. $(x^2-2x)^2-2(x-1)^2-1<0$. 2. $(x-1)(x+2)^2(x+5) \geqslant -8$.

3. $x^2-2x-4+\dfrac{4}{(x-1)^2} \geqslant 0$.

IV вариант

Решите неравенство (1—3).

1. $(x^2+4x)^2-(x+2)^2-16<0$. 2. $(x+5)(x+7)^2(x+9) \geqslant -3$.

3. $x^2+2x-9+\dfrac{9}{(x+1)^2} \geqslant 0$.

С–14* Замена неизвестного при решении иррациональных уравнений и неравенств

I вариант

1. Решите уравнение:

а) $2\sqrt{x-3} = x-6$; б) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = 2$;

в) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} - 3\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} - 2 = 0$.

2. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2x-1} > 2x-3$; б) $\dfrac{3x-2}{2x-3} - \sqrt{\dfrac{3x-2}{2x-3}} - 6 \geqslant 0$;

в) $\sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}} - 10\sqrt{\dfrac{x+1}{3x-2}} + 3 \geqslant 0$.

II вариант

1. Решите уравнение:

а) $3\sqrt{x-4} = 14-x$; б) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = -3$;

в) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} + 2\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} - 3 = 0$.

2. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2x+1} > 2x-1$; б) $\dfrac{2x+3}{3x-2} - \sqrt{\dfrac{2x+3}{3x-2}} - 12 \geqslant 0$;

в) $\sqrt{\dfrac{2x-5}{x+1}} - 6\sqrt{\dfrac{x+1}{2x-5}} - 1 \geqslant 0$.

III вариант

1. Решите уравнение:

а) $4\sqrt{5x-1} = 7-20x$; б) $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = -\dfrac{3}{2}$;

в) $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-2}} - 3\sqrt{\dfrac{x-2}{2x+1}} + 2 = 0$.

2. Решите неравенство:

а) $4\sqrt{x+5} < x+8$;   б) $\frac{3x-1}{2x+1} + \sqrt{\frac{3x-1}{2x+1}} - 6 \leqslant 0$;

в) $\sqrt{\frac{8x-11}{x-2}} - 6\sqrt{\frac{x-2}{8x-11}} + 1 \leqslant 0$.

IV вариант

1. Решите уравнение:

а) $3\sqrt{10x-1} = 11 - 90x$;   б) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} = -\frac{2}{3}$;

в) $\sqrt{\frac{3x-1}{x+2}} - 4\sqrt{\frac{x+2}{3x-1}} + 3 = 0$.

2. Решите неравенство:

а) $5\sqrt{x+4} < x+10$;   б) $\frac{2x-3}{3x-2} - \sqrt{\frac{2x-3}{3x-2}} - 12 \leqslant 0$;

в) $\sqrt{\frac{2x-1}{x+3}} - 12\sqrt{\frac{x+3}{2x-1}} + 4 \leqslant 0$.

С—15* Задачи с параметром

I вариант

1. Найдите все значения a, при каждом из которых любое действительное число x является решением неравенства $x^2+(2a+1)x - \frac{a}{4} > 0$.
2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+(a+1)x+9=0$ имеет два различных корня, больших 2.
3. Найдите все значения a, при каждом из которых не имеет решений система неравенств

$$\begin{cases} x^2-(6a-4)x+9a^2-12a \geqslant 0 \\ |4x-5a| \leqslant 2. \end{cases}$$

4. Найдите все значения a, при каждом из которых один из корней уравнения $x^2-(3a-2)x+2a^2-a-3=0$ положительный, а другой заключен между числами -2 и -1.

II вариант

1. Найдите все значения a, при каждом из которых любое действительное число x является решением неравенства $x^2+(3a-1)x+a>0$.
2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+(a-1)x+4=0$ имеет два различных корня, меньших -1.
3. Найдите все значения a, при каждом из которых не имеет решений система неравенств
$$\begin{cases} x^2-(6a+7)x+9a^2+21a \geqslant 0 \\ |3x-5a| \leqslant 2. \end{cases}$$
4. Найдите все значения a, при каждом из которых один из корней уравнения $x^2+(3a-3)x+2a^2-2a-4=0$ отрицательный, а другой заключен между числами 1 и 2.

III вариант

1. Найдите все значения a, при каждом из которых любое действительное число x является решением неравенства $x^2+(2a-3)x+\frac{a}{4} \geqslant 0$.
2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+(2a-1)x+4=0$ имеет два различных корня, меньших -1.
3. Найдите все значения a, при каждом из которых не имеет решений система неравенств
$$\begin{cases} x^2-(4a-4)x+4a^2-8a \leqslant 0 \\ |5x-2a| < 4. \end{cases}$$
4. Найдите все значения a, при каждом из которых один из корней уравнения $x^2-(4a-6)x+3a^2-10a+8=0$ отрицательный, а другой заключен между числами -1 и -2.

IV вариант

1. Найдите все значения a, при каждом из которых любое действительное число x является решением неравенства $x^2+(3a+2)x-2a \geqslant 0$.
2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2+(2a+1)x+4=0$ имеет два различных корня, больших 1.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых не имеет решений система неравенств

$$\begin{cases} x^2-(6a+2)x+9a^2+6a<0 \\ |3x-2a|\leqslant 4. \end{cases}$$

4. Найдите все значения a, при каждом из которых один из корней уравнения $x^2+(4a+2)x+3a^2+8a-3=0$ положительный, а другой заключен между числами -3 и -2.

С—16 Корень степени n

I вариант

1. Вычислите:
   а) $5+\sqrt[3]{-64}$; б) $4+\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$;
   г) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; д) $(2-\sqrt[3]{6})(4+2\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{36})$.
2. Упростите выражение:
   а) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{48}+\sqrt{32}}$; б) $\dfrac{32}{9-3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}-\sqrt[3]{5}$.
3. Вынесите множитель из-под знака корня:
   а) $\sqrt[3]{24}$; б) $\sqrt[4]{3a^4}$, если $a>0$; в) $\sqrt[4]{5x^4}$, если $x<0$.
4. Внесите множитель под знак корня:
   а) $2\sqrt[3]{5}$; б) $b\sqrt[4]{6}$, если $b>0$; в) $y\sqrt[4]{2}$, если $y<0$.

II вариант

1. Вычислите:
   а) $4+\sqrt[3]{-27}$; б) $3+\sqrt[4]{16}$; в) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}$;
   г) $\dfrac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}}$; д) $(\sqrt[3]{7}+3)(\sqrt[3]{49}-3\sqrt[3]{7}+9)$.
2. Упростите выражение:
   а) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{45}-\sqrt{27}}$; б) $\dfrac{61}{16+4\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}+\sqrt[3]{3}$.
3. Вынесите множитель из-под знака корня:
   а) $\sqrt[3]{32}$; б) $\sqrt[4]{8b^4}$, если $b>0$; в) $\sqrt[4]{2y^4}$, если $y<0$.
4. Внесите множитель под знак корня:
   а) $3\sqrt[3]{3}$; б) $a\sqrt[4]{2}$, если $a>0$; в) $x\sqrt[4]{5}$, если $x<0$.

III вариант

1. Вычислите:

а) $6+\sqrt[3]{-125}$; б) $9-\sqrt[4]{1296}$; в) $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{8}$;

г) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$; д) $(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{7})(\sqrt[4]{81}+\sqrt[3]{63}+\sqrt[3]{49})$.

2. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}$; б) $\dfrac{19}{\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{90}+\sqrt[3]{81}}-\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{9}$.

3. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{56}$; б) $\sqrt[4]{625a^4b}$, если $a>0$; в) $\sqrt[4]{32x^4y^5}$, если $x<0$.

4. Внесите множитель под знак корня:

а) $5\sqrt[3]{2}$; б) $2b\sqrt[4]{3a}$, если $b>0$; в) $3y\sqrt[4]{2x}$, если $y<0$.

IV вариант

1. Вычислите:

а) $7+\sqrt[3]{-216}$; б) $9-\sqrt[4]{2401}$; в) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$;

г) $\dfrac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}}$; д) $(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25})$.

2. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}}$; б) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{100}+\sqrt[3]{70}+\sqrt[3]{49}}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{7}$.

3. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt[3]{72}$; б) $\sqrt[4]{256ab^4}$, если $b>0$; в) $\sqrt[4]{48x^5y^4}$, если $y<0$.

4. Внесите множитель под знак корня:

а) $4\sqrt[3]{3}$; б) $3a\sqrt[4]{2b}$, если $a>0$; в) $2x\sqrt[4]{5y}$, если $x<0$.

С–17* Функция $y=\sqrt[n]{x}$

I вариант

1. Сравните числа $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt[4]{13}$.
2. Сравните числа $\sqrt[4]{2004}-\sqrt[3]{2003}$ и $\sqrt[4]{2005}-\sqrt[3]{2002}$.
3. Докажите, что функция $y=\sqrt[3]{5x+7}$ возрастающая.
4. Решите уравнение $\sqrt[3]{15x-3}+\sqrt{2+x}=\sqrt[3]{127-x}$.

II вариант

1. Сравните числа $\sqrt[3]{9}$ и $\sqrt[4]{19}$.
2. Сравните числа $\sqrt[4]{2004} - \sqrt[8]{2003}$ и $\sqrt[4]{2002} - \sqrt[8]{2007}$.
3. Докажите, что функция $y = \sqrt[3]{1-4x}$ убывающая.
4. Решите уравнение $\sqrt[3]{5x-2} + \sqrt{5+2x} = \sqrt[3]{129-2x}$.

III вариант

1. Сравните числа $\sqrt[3]{11}$ и $\sqrt[4]{22}$.
2. Сравните числа $\sqrt[3]{2003} - \sqrt[4]{2001}$ и $\sqrt[3]{2002} - \sqrt[4]{2004}$.
3. Докажите, что функция $y = \sqrt[4]{6x+1}$ возрастающая.
4. Решите уравнение $\sqrt[3]{15x+3} + \sqrt{6+x} = \sqrt[3]{-3-x}$.

IV вариант

1. Сравните числа $\sqrt[3]{12}$ и $\sqrt[4]{28}$.
2. Сравните числа $\sqrt[3]{2004} - \sqrt[4]{2006}$ и $\sqrt[3]{2007} - \sqrt[4]{2005}$.
3. Докажите, что функция $y = \sqrt[4]{1-5x}$ убывающая.
4. Решите уравнение $\sqrt[3]{10x-7} + \sqrt{4+2x} = \sqrt[3]{-29-x}$.

С—18 Степень с рациональным показателем

I вариант

1. Запишите в виде корня: $2^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{1}{3}}$; $3^{\frac{3}{4}}$.
2. Упростите, применив формулы сокращенного умножения:

   а) $\left(m - n^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(m + n^{\frac{1}{2}}\right)^2$; б) $\left(m^{\frac{1}{3}} + 2n^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(m^{\frac{1}{3}} - 2n^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

   в) $\left(m^{\frac{1}{4}} - n^{\frac{1}{2}}\right)\left(m^{\frac{1}{4}} + n^{\frac{1}{2}}\right)$; г) $\left(m^{\frac{1}{2}} + n\right)\left(m - m^{\frac{1}{2}}n + n^2\right)$.
3. Вычислите $\left(7^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(7^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right)^2$.
4. Сократите дробь $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}$.
5. Упростите $\left(\left(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}\right)^{-2} + \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^{-2}\right) : \dfrac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$.

II вариант

1. Запишите в виде степени: $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[5]{2^6}$.
2. Упростите, применив формулы сокращенного умножения:

а) $\left(m^{\frac{1}{2}}+n\right)^2+\left(m^{\frac{1}{2}}-n\right)^2$; б) $\left(m^{\frac{1}{4}}-2n^{\frac{1}{3}}\right)^2-\left(m^{\frac{1}{4}}+2n^{\frac{1}{3}}\right)^2$;

в) $\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{4}}\right)\left(m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{4}}\right)$; г) $\left(m^{\frac{1}{2}}-n\right)\left(m+m^{\frac{1}{2}}n+n^2\right)$.

3. Вычислите $\left(6^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(6^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}\right)^2$.
4. Сократите дробь $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$.
5. Упростите $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\right)\cdot\left(y^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)$.

III вариант

1. Запишите в виде корня: $3^{\frac{1}{2}}$; $5^{\frac{1}{4}}$; $4^{\frac{2}{3}}$.
2. Упростите, применив формулы сокращенного умножения:

а) $\left(m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{2}}\right)^2$; б) $\left(m^{\frac{1}{4}}-3n^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(m^{\frac{1}{4}}+3n^{\frac{1}{3}}\right)^2$;

в) $\left(3m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{2}}\right)\left(3m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{2}}\right)$; г) $\left(m^{\frac{1}{2}}+2n\right)\left(m-2m^{\frac{1}{2}}n+4n^2\right)$.

3. Вычислите $\left(\left(3^{\frac{1}{4}}+27^{\frac{1}{4}}\right)^2-12\right)\left(\left(3^{\frac{1}{4}}-27^{\frac{1}{4}}\right)^2+12\right)$.
4. Сократите дробь $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}$.
5. Упростите $\dfrac{m^{\frac{4}{3}}-27m^{\frac{1}{3}}n}{\sqrt[3]{m^2}+3\sqrt[3]{mn}+9\sqrt[3]{n^2}}:\left(1-3\left(\dfrac{m}{n}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)$.

IV вариант

1. Запишите в виде степени: $\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{6^5}$.
2. Упростите, применив формулы сокращенного умножения:

а) $\left(m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{2}}\right)^2$; б) $\left(m^{\frac{1}{3}}+3n^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(m^{\frac{1}{3}}-3n^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

в) $\left(m^{\frac{1}{2}}-2n^{\frac{1}{4}}\right)\left(m^{\frac{1}{2}}+2n^{\frac{1}{4}}\right)$; г) $\left(m^{\frac{1}{2}}-3n\right)\left(m+3m^{\frac{1}{2}}n+9n^2\right)$.

3. Вычислите $\left(\left(2^{\frac{1}{4}}-8^{\frac{1}{4}}\right)^2+8\right)\left(\left(2^{\frac{1}{4}}+8^{\frac{1}{4}}\right)^2-8\right)$.
4. Сократите дробь $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}$.
5. Упростите $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x^4}-8y\sqrt[3]{x}}\cdot\left(2-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)$.

С—19* Предел последовательности

I вариант

1. а) Представьте переменную $x_n=\dfrac{5n+2}{n}$ в виде суммы числа и бесконечно малой.

   б) Чему равен $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$?
2. Пользуясь свойствами пределов, вычислите предел:

а) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+2}{n}$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2+5n-7}{2n^2-n+4}$;

в) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2-n+7}{n^3+3n+2}$; г) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^3-n+13}{n^2+7n-1}$;

д) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+1}\right)$; е) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}$.

3. а) Докажите, что переменная $x_n=5-n$ является бесконечно большой, пользуясь определением бесконечно большой (на языке «M—N»).

   б) Чему равен $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$?

II вариант

1. а) Представьте переменную $x_n = \dfrac{4n-5}{n}$ в виде суммы числа и бесконечно малой.

   б) Чему равен $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$?

2. Пользуясь свойствами пределов, вычислите предел:

   а) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n+5}{n}$; б) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5n^2-2n+3}{2n^2+3n+2}$;

   в) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^3+n-1}{n^2+4n+2}$; г) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2-5n+3}{n^3+6n+11}$;

   д) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2n}\right)$; е) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$.

3. а) Докажите, что переменная $x_n = 3 + 2n$ является бесконечно большой, пользуясь определением бесконечно большой (на языке «M—N»).

   б) Чему равен $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$?

III вариант

1. а) Представьте переменную $x_n = \dfrac{15n+2}{5n-1}$ в виде суммы числа и бесконечно малой.

   б) Чему равен $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$?

2. Пользуясь свойствами пределов, вычислите предел:

   а) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{7n+3}{5n-12}$; б) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2+n-10}{n^3+12n+20}$;

   в) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{6n+5}{2n-3} + \dfrac{4n-1}{2n+3}\right)$; г) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-n^3+4n-10}{5n^2+n+21}$;

   д) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+11}\right)$; е) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{n}$.

3. а) Докажите, что переменная $x_n = \dfrac{-11}{5n+12}$ является бесконечно малой, пользуясь определением бесконечно малой (на языке «ε—N»).

   б) Чему равен $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$?

IV вариант

1. а) Представьте переменную $x_n = \dfrac{12n-5}{3n+1}$ в виде суммы числа и бесконечно малой.
б) Чему равен $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$?

2. Пользуясь свойствами пределов, вычислите предел:

а) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n+7}{4n-5}$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2n^3+n-10}{n^2+12n+20}$;

в) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3n-11}{2n+3} + \dfrac{7n+1}{2n-3}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+5n-13}{-2n^3+7n+1}$;

д) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+11} - \sqrt{n^2+2n}\right)$; е) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$.

3. а) Докажите, что переменная $x_n = \dfrac{2}{3n+1}$ является бесконечно малой, пользуясь определением бесконечно малой (на языке «ε—N»).
б) Чему равен $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$?

С—20 Логарифмы

I вариант

1. Применив свойство логарифмов, преобразуйте выражение:
а) $\log_a(M \cdot N)$, где $M > 0$, $N > 0$;
б) $\log_a M^\alpha$, где $M > 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

2. Вычислите:

а) $\log_2 8$; б) $\log_9 \dfrac{1}{81}$; в) $\lg 10000$;

г) $\log_{0,2} 5$; д) $\log_{99} 1$; е) $\ln e^{2004}$.

3. Вычислите:

а) $\log_{12} 48 + \log_{12} 3$; б) $\log_{11} 484 - \log_{11} 4$; в) $2^{\log_2 5}$;

г) $\dfrac{\log_3 125}{\log_3 5}$; д) $25^{\log_5(2-\sqrt{2})} + 9^{\log_3(\sqrt{2}+2)}$.

4. Вычислите $\sqrt{(\log_2 5 + 16\log_5 2 - 8)\cdot\log_5 2} + 4\log_5 12{,}5$.

5. Сравните числа:

а) $\log_7 5$ и $\log_5 6$; б) $\log_{0,4} 9$ и $\log_{0,4} 8$;

в) $\log_5 7$ и $\log_4 7$; г) $\log_2 3$ и $\log_3 4$.

6. Докажите иррациональность числа $\log_3 4$.

II вариант

1. Применив свойство логарифмов, преобразуйте выражение:

   а) $\log_a \frac{M}{N}$, где $M > 0$, $N > 0$;

   б) $\log_{a^\alpha} M^\alpha$, где $M > 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\alpha \neq 0$.

2. Вычислите:

   а) $\log_3 27$; б) $\log_2 \frac{1}{4}$; в) $\lg 0{,}001$;

   г) $\log_{0,5} 2$; д) $\log_{98} 1$; е) $\ln e^{2005}$.

3. Вычислите:

   а) $\log_{12} 16 + \log_{12} 9$; б) $\log_{11} 363 - \log_{11} 3$; в) $7^{\log_7 24}$;

   г) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4}$; д) $16^{\log_4(5-\sqrt{5})} + 4^{\log_2(\sqrt{5}+5)}$.

4. Вычислите $\sqrt{(\log_3 4 + 9\log_4 3 - 6)\cdot\log_4 3} + \log_4 \frac{64}{27}$.

5. Сравните числа:

   а) $\log_5 8$ и $\log_4 3$; б) $\log_{0,5} 7$ и $\log_{0,5} 9$;

   в) $\log_3 6$ и $\log_4 6$; г) $\log_3 2$ и $\log_4 3$.

6. Докажите иррациональность числа $\log_4 3$.

III вариант

1. Применив свойство логарифмов, преобразуйте выражение $\log_a M^2$, если:

   а) $M \neq 0$; б) $M > 0$; в) $M < 0$.

2. Вычислите:

   а) $\log_3 81$; б) $\log_6 \frac{1}{\sqrt{6}}$; в) $\lg 100^3$;

   г) $\log_{0,25} 4$; д) $\log_{999} 1$; е) $\ln e^{2006}$.

3. Вычислите:

   а) $\log_{15} 25 + \log_{15} 9$; б) $\log_{11} 605 - \log_{11} 5$; в) $2^{\log_2 25}$;

   г) $\frac{\log_4 216}{\log_4 6}$; д) $5^{\log_{25}(\sqrt{2}-2)^2} + 3^{\log_9(\sqrt{2}+2)^2}$.

4. Вычислите $\frac{2^{\log_3 5+2}}{5^{\log_3 6}} + 4^{\log_2(3-\sqrt{3})} + 9^{\log_3(\sqrt{3}+3)}$.

5. Сравните числа:

   а) $\log_3 10$ и $\log_4 15$; б) $\log_{0,3} 5$ и $\log_{0,3} 7$;

   в) $\log_6 7$ и $\log_5 7$; г) $\log_3 6$ и $\log_4 7$.

6. Докажите иррациональность числа $\log_5 7$.

IV вариант

1. Применив свойство логарифмов, преобразуйте выражение $\log_a M^4$, если:
   а) $M \neq 0$; б) $M > 0$; в) $M < 0$.
2. Вычислите:
   а) $\log_2 32$; б) $\log_5 \frac{1}{\sqrt{5}}$; в) $\lg (0{,}01)^3$;
   г) $\log_{0,5} 16$; д) $\log_{988} 1$; е) $\ln e^{2007}$.
3. Вычислите:
   а) $\log_{14} 49 + \log_{14} 4$; б) $\log_{13} 338 - \log_{13} 2$; в) $5^{\log_5 26}$;
   г) $\frac{\log_7 243}{\log_7 3}$; д) $7^{\log_{49}(\sqrt{3}-3)^2} + 4^{\log_{16}(\sqrt{3}+3)^2}$.
4. Вычислите $\frac{\left(5^{\log_{\sqrt{5}}(3+\sqrt{2})} - 49^{\log_7(3-\sqrt{2})}\right) \cdot 2^{\log_3 7\sqrt{3}}}{7^{\log_3 6}} - \frac{3}{7}$.
5. Сравните числа:
   а) $\log_4 17$ и $\log_5 24$; б) $\log_{0,1} 6$ и $\log_{0,1} 4$;
   в) $\log_6 8$ и $\log_7 8$; г) $\log_6 3$ и $\log_7 4$.
6. Докажите иррациональность числа $\log_7 5$.

С—21 Показательные и логарифмические уравнения

I вариант

Решите уравнение (1—3).

1. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$; б) $2^{2x-7} = 8$;
   в) $\log_2 x = 3$; г) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) = -2$.
2. а) $3^{x+1} - 3^x = 18$; б) $\log_2 x + \log_4 x = 6$;
   в) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 x) = -1$.
3. а) $(\lg x)^2 - \lg x = 2$; б) $3^{2x-3} - 8 \cdot 3^{x-2} = 3$;
   в) $\log_2 x - \log_x 4 = 3$; г) $\log_2(5x-1) - \frac{3}{\log_2(5x-1)-1} + 1 = 0$;
   д) $5^x - 6 \cdot 5^{-x} = 3{,}8$.

II вариант

Решите уравнение (1—3).

1. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8;$ б) $3^{2x+1} = 27;$

в) $\log_3 x = 2;$ г) $\log_{\frac{1}{3}}(4x+1) = -2.$

2. а) $9^{x+1} - 9^x = 72;$ б) $\log_3 x - \log_9 x = 2;$

в) $\log_2(\log_{\frac{1}{2}} x) = 1.$

3. а) $(\lg x)^2 - 2\lg x = 3;$ б) $2^{6x-1} - 7 \cdot 2^{3x-1} = 4;$

в) $\log_3 x - \log_x 9 = 1;$ г) $\log_4(5x-4) - \dfrac{3}{\log_4(5x-4)-1} + 1 = 0;$

д) $4^x - 6 \cdot 4^{-x} = 2{,}5.$

III вариант

Решите уравнение (1—3).

1. а) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 64;$ б) $5^{3x-4} = 25;$

в) $\log_6 x = -2;$ г) $\log_{\frac{1}{4}}(2x+1) = -1.$

2. а) $9^x - 3^{2x-2} = 72;$ б) $\log_3 x - \log_9 x + \log_{81} x = 3;$

в) $\log_2(1 + \log_{\frac{1}{2}} x) = 2.$

3. а) $36^x - 5 \cdot 6^x = 6;$ б) $3^{4x-7} - 10 \cdot 3^{2x-4} + 3 = 0;$

в) $3^{2x-1} - \dfrac{8}{3^{2x-1}-1} = -1;$ г) $\log_2 x - 3\log_x 4 = 1;$

д) $\log_3(4x-3) - \dfrac{5}{\log_3(4x-3)+3} - 1 = 0.$

IV вариант

Решите уравнение (1—3).

1. а) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 125;$ б) $6^{3x-4} = 36;$

в) $\log_7 x = -2;$ г) $\log_{\frac{1}{5}}(4x-1) = -1.$

2. а) $4^x - 5 \cdot 2^{2x-1} = -6$; б) $\log_2 x - \log_4 x + \log_8 x = 5$;

в) $\log_3(1 + \log_{\frac{1}{3}} x) = 1$.

3. а) $25^x + 4 \cdot 5^x = 5$; б) $2^{10x-5} - 9 \cdot 2^{5x-3} + 4 = 0$;

в) $2^{3x-5} - \dfrac{3}{2^{3x-5}+1} = 1$; г) $\log_3 x - 2\log_x 27 = -1$;

д) $\log_5(4x-3) - \dfrac{4}{\log_5(4x-3)+1} + 1 = 0$.

С—22 Показательные и логарифмические неравенства

I вариант

Решите неравенство (1—3).

1. а) $2^x < \frac{1}{8}$; б) $(0,2)^x \leqslant -0,2$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} \geqslant 4$;

г) $\log_2 x > 2$; д) $\log_{0,2}(x+2) \geqslant -1$; е) $4^{x+2} - 13 \cdot 4^x > 12$.

2. а) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x > -9$; б) $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 \geqslant 0$;

в) $\lg^2 x - \lg x - 2 < 0$; г) $\log_{0,5}^2 x + 2\log_{0,5} x - 3 > 0$.

3. а) $\dfrac{\log_3 4,5}{3 - \log_3 x} \geqslant 1$; б) $9^x - 2 \cdot 3^x + \dfrac{1}{9^x - 2 \cdot 3^x + 2} > 0$;

в) $(2-\sqrt{3})^{2x} - 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x + 1 \leqslant 0$.

II вариант

Решите неравенство (1—3).

1. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 9$; б) $(0,5)^x \geqslant -0,5$; в) $3^{x+1} < \frac{1}{27}$;

г) $\log_{0,3} x \leqslant 2$; д) $\log_3(2x+1) < 3$;
е) $5^{x+2} - 21 \cdot 5^x < 20$.

2. а) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x > -4$; б) $64^x + 7 \cdot 8^x - 8 \leqslant 0$;

в) $\lg^2 x - 2\lg x - 3 < 0$; г) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 > 0$.

3. а) $\dfrac{\log_4 2{,}5}{\log_4 x - 1} \geqslant 1$; б) $9^x - 6\cdot 3^x + 8 + \dfrac{1}{9^x - 6\cdot 3^x + 10} > 0$;

в) $(2+\sqrt{3})^{2x} - 4\cdot\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x + 1 \geqslant 0$.

III вариант

Решите неравенство (1—3).

1. а) $4^x < 8$; б) $(0{,}6)^x \geqslant -0{,}6$; в) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+5} \leqslant 9$;

г) $\log_5 x < -1$; д) $\log_{0,3}(4x+2) \geqslant -1$; е) $6^x - 33\cdot 6^{x-2} > 18$.

2. а) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x - 6\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \leqslant -8$; б) $16^x - 2\cdot 4^x + 1 > 0$;

в) $\lg^2 x + \lg x - 2 > 0$; г) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 6 < 0$.

3. а) $\dfrac{\log_5 12{,}5}{2 - \log_5 x} \leqslant 1$; б) $4^x - 4\cdot 2^x + 3 + \dfrac{1}{4^x - 4\cdot 2^x + 5} > 0$;

в) $(4-\sqrt{15})^{2x} - 8\cdot\left(\dfrac{1}{4+\sqrt{15}}\right)^x + 1 \geqslant 0$.

IV вариант

Решите неравенство (1—3).

1. а) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x \geqslant 2$; б) $(0{,}7)^x \leqslant -0{,}7$; в) $4^{2x-1} > \dfrac{1}{2}$;

г) $\log_{0,2} x \geqslant -1$; д) $\log_5(4x+1) < 2$; е) $7^x - 44\cdot 7^{x-2} < 35$.

2. а) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x - 9\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geqslant -8$; б) $64^x - 4\cdot 8^x + 4 > 0$;

в) $\lg^2 x + 2\lg x - 3 > 0$; г) $\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x - 6 < 0$.

3. а) $\dfrac{\log_6 3{,}6}{2 - \log_6 x} \leqslant 1$; б) $25^x - 10\cdot 5^x + 24 + \dfrac{1}{25^x - 10\cdot 5^x + 26} > 0$;

в) $(4+\sqrt{15})^{2x} - 8\cdot\left(\dfrac{1}{4-\sqrt{15}}\right)^x + 1 \leqslant 0$.

«Однородные» показательные уравнения и неравенства

I вариант

1. Решите уравнение:
   а) $27 \cdot 2^x - 8 \cdot 3^x = 0$; б) $2^{x+1} - 2^{x-1} = 3^{2-x}$;
   в) $9 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 4 \cdot 9^x = 0$.
2. Решите неравенство:
   а) $5^{x-1} < 5 \cdot 3^{x-2}$; б) $3^{x+3} - 2 \cdot 3^{x+2} > 5^{x+2}$;
   в) $4 \cdot 16^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 9^x > 0$.

II вариант

1. Решите уравнение:
   а) $125 \cdot 3^x - 27 \cdot 5^x = 0$; б) $3^{x+1} - 3^{x-1} = 2^{4-x}$;
   в) $27 \cdot 4^x + 8 \cdot 9^x = 30 \cdot 6^x$.
2. Решите неравенство:
   а) $3^{x-1} > 3 \cdot 5^{x-2}$; б) $2^{x+3} - 2^{x+2} < 3^{x+2}$;
   в) $4 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 4^x < 0$.

III вариант

1. Решите уравнение:
   а) $625 \cdot 2^x - 16 \cdot 5^x = 0$; б) $3^{x-4} - 3^{x-6} = 2^{x-3}$;
   в) $4^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+1} = 0$.
2. Решите неравенство:
   а) $6^{x-1} < 2^{2x-2}$; б) $3^{x+3} - 2 \cdot 3^x > 9 \cdot 5^x$;
   в) $12 \cdot 9^x + 12 \cdot 16^x < 25 \cdot 12^x$.

IV вариант

1. Решите уравнение:
   а) $256 \cdot 3^x - 81 \cdot 4^x = 0$; б) $5^{x-3} - 5^{x-4} = 2^{x-2}$;
   в) $3 \cdot 9^{x+1} - 30 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^{x+1} = 0$.
2. Решите неравенство:
   а) $6^{x-1} > 3^{2x-2}$; б) $3^{x+3} - 11 \cdot 3^x < 9 \cdot 4^x$;
   в) $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x > 0$.

I вариант

1. Величина угла α выражена в градусах, выразите ее в радианах, если: а) $\alpha = 180°$; б) $\alpha = 30°$.
2. Величина угла α выражена в радианах, выразите ее в градусах, если: а) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; б) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.
3. Точка C делит дугу AB единичной окружности на две равные части, а точки M и N делят дугу AB на три равные части (рис. 21). Определите величину угла: а) AOC в градусах; б) AON в радианах.

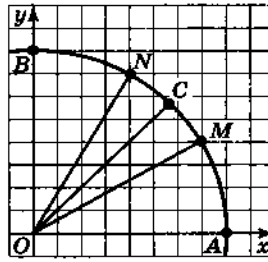

Рис. 21

II вариант

1. Величина угла α выражена в градусах, выразите ее в радианах, если: а) $\alpha = 90°$; б) $\alpha = 270°$.
2. Величина угла α выражена в радианах, выразите ее в градусах, если: а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; б) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.
3. Точка C делит дугу AB единичной окружности на две равные части, а точки M и N делят дугу AB на три равные части (см. рис. 21). Определите величину угла: а) AON в градусах; б) AOC в радианах.

III вариант

1. Величина угла α выражена в градусах, выразите ее в радианах, если: а) $\alpha = 60°$; б) $\alpha = 120°$.
2. Величина угла α выражена в радианах, выразите ее в градусах, если: а) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; б) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.
3. Точка C делит дугу AB единичной окружности на две равные части, а точки M и N делят дугу AB на три равные части (см. рис. 21). Определите величину угла: а) AOM в градусах; б) AOC в радианах.

IV вариант

1. Величина угла α выражена в градусах, выразите ее в радианах, если: а) $\alpha = 45°$; б) $\alpha = 135°$.
2. Величина угла α выражена в радианах, выразите ее в градусах, если: а) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; б) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

3. Точка C делит дугу AB единичной окружности на две равные части, а точки M и N делят дугу AB на три равные части (см. рис. 21). Определите величину угла: а) AOC в градусах; б) AOM в радианах.

С—25 Запись углов, заданных точками единичной окружности

I вариант

1. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β, заключенным в промежутке от $0°$ до $360°$ (рис. 22, *а*). Выразите α и β в градусах.
2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β, заключенным в промежутке от 0 до 2π радиан (рис. 22, *б*). Выразите α и β в радианах.
3. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β (рис. 22, *в*). Запишите все такие углы α и β, используя градусную меру.
4. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β (рис. 22, *г*). Запишите все такие углы α и β, используя радианную меру.

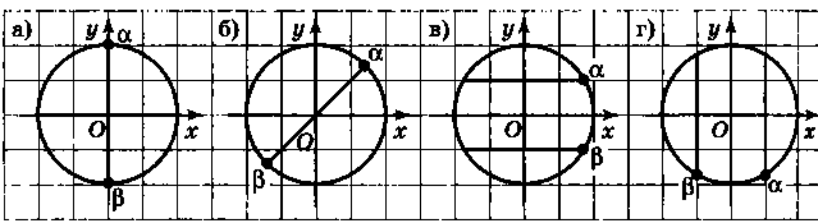

Рис. 22

II вариант

1. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β, заключенным в промежутке от $0°$ до $360°$ (рис. 23, *а*). Выразите α и β в градусах.

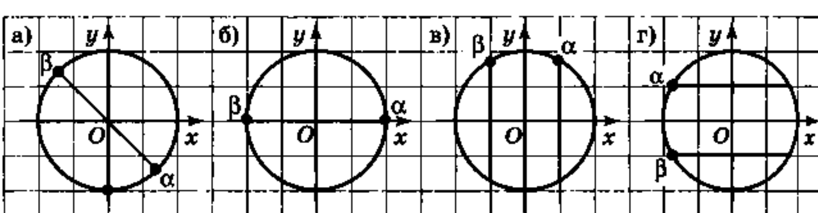

Рис. 23

2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β, заключенным в промежутке от 0 до 2π радиан (рис. 23, *б*). Выразите α и β в радианах.
3. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β (рис. 23, *в*). Запишите все такие углы α и β, используя градусную меру.
4. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β (рис. 23, *г*). Запишите все такие углы α и β, используя радианную меру.

III вариант

1. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β, заключенным в промежутке от $0°$ до $360°$ (рис. 24, *а*). Выразите α и β в градусах.
2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β, заключенным в промежутке от 0 до 2π радиан (рис. 24, *б*). Выразите α и β в радианах.
3. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β (рис. 24, *в*). Запишите все такие углы α и β, используя градусную меру.
4. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β (рис. 24, *г*). Запишите все такие углы α и β, используя радианную меру.

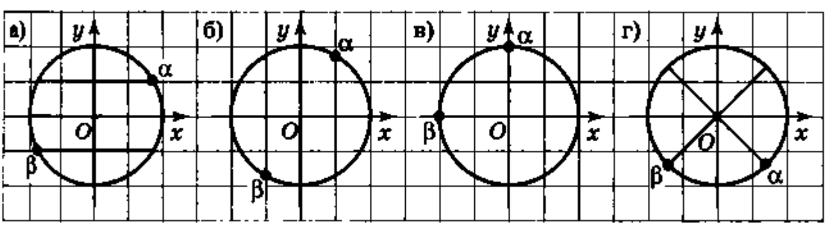

Рис. 24

IV вариант

1. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β, заключенным в промежутке от $0°$ до $360°$ (рис. 25, *а*). Выразите α и β в градусах.
2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β, заключенным в промежутке от 0 до 2π радиан (рис. 25, *б*). Выразите α и β в радианах.
3. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β (рис. 25, *в*). Запишите все такие углы α и β, используя градусную меру.

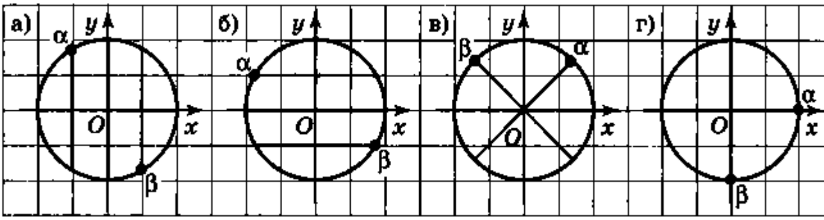

Рис. 25

4. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α и β (рис. 25, *г*). Запишите все такие углы α и β, используя радианную меру.

С—26 Синус и косинус угла

I вариант

1. Определите синус и косинус острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 26).

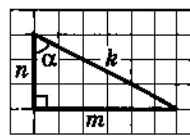

Рис. 26

2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α, β, γ и φ (рис. 27). Определите значения синуса и косинуса каждого из этих углов.

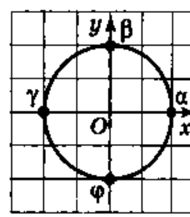

Рис. 27

3. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие всем таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

   а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

   в) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos\alpha = -1$.

   Запишите все такие углы α.

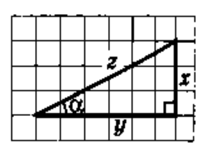

Рис. 28

II вариант

1. Определите синус и косинус острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 28).
2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α, β, γ и φ (рис. 29). Определите значения синуса и косинуса каждого из этих углов.

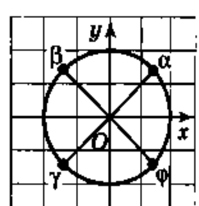

Рис. 29

3. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие всем таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; в) $\cos\alpha = 1$; г) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Запишите все такие углы α.

III вариант

1. Определите синус и косинус острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 30).
2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α, β, γ и φ (рис. 31). Определите значения синуса и косинуса каждого из этих углов.
3. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие всем таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin\alpha = -1$;

в) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; г) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Запишите все такие углы α.

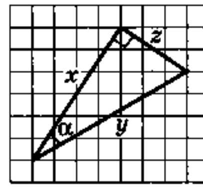

Рис. 30

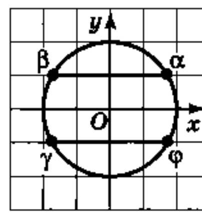

Рис. 31

IV вариант

1. Определите синус и косинус острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 32).
2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α, β, γ и φ (рис. 33). Определите значения синуса и косинуса каждого из этих углов.
3. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие всем таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

а) $\sin\alpha = 1$; б) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

Запишите все такие углы α.

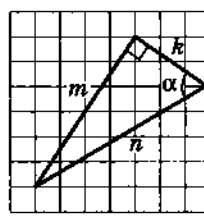

Рис. 32

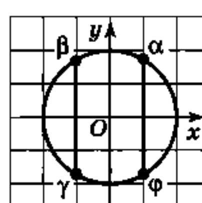

Рис. 33

I вариант

1. Вычислите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

2. Докажите, что для любых α справедливо равенство
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha.$$

3. Вычислите $\left(\sin\frac{11\pi}{4} - \cos\frac{13\pi}{4}\right) \cdot \sin(-2{,}5\pi) : \cos\left(-\frac{25\pi}{3}\right)$.

4. Вычислите $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$, если $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$.

II вариант

1. Вычислите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2. Докажите, что для любых α справедливо равенство
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$$

3. Вычислите $\left(\sin\frac{9\pi}{4} - \cos\frac{11\pi}{4}\right) \cdot \sin(-3{,}5\pi) : \cos\left(-\frac{28\pi}{3}\right)$.

4. Вычислите $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, если $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$.

III вариант

1. Вычислите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

2. Докажите, что для любых α справедливо равенство
$$\sin(3\pi + \alpha) = -\sin\alpha.$$

3. Вычислите $\left(\cos\frac{20\pi}{3} - \sin\frac{17\pi}{6}\right) \cdot \sin(-27{,}5\pi) : \cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right)$.

4. Вычислите $\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right) : |\sin\alpha|$, если $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

IV вариант

1. Вычислите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
2. Докажите, что для любых α справедливо равенство
$$\cos(3\pi + \alpha) = -\cos\alpha.$$
3. Вычислите $\left(\cos\frac{17\pi}{3} + \sin\frac{25\pi}{6}\right) \cdot \sin(-31{,}5\pi) : \cos\left(-\frac{35\pi}{4}\right)$.
4. Вычислите $\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right) : |\cos\alpha|$, если $\sin\alpha = \frac{2}{9}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

С—28* Арксинус и арккосинус

I вариант

1. Изобразите на единичной окружности все точки, соответствующие углам $\alpha = \arcsin\frac{1}{3}$, $\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$, $\gamma = \arccos\frac{1}{3}$, $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.
2. Вычислите:
а) $\arcsin\frac{1}{2}$; б) $\arcsin 0$; в) $\arccos 1$; г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Упростите (3—4).

3. а) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)$; б) $\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$;
в) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$; г) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$.
4. а) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)$; б) $\arccos(\sin 0{,}6\pi)$; в) $\arcsin(\sin 3)$.

II вариант

1. Изобразите на единичной окружности все точки, соответствующие углам $\alpha = \arcsin\frac{1}{4}$, $\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)$, $\gamma = \arccos\frac{1}{4}$, $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.

2. Вычислите:

а) $\arcsin 1$; б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\arccos 0$; г) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Упростите (3—4).

3. а) $\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$; б) $\cos\left(\arccos\frac{1}{5}\right)$;

в) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; г) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

4. а) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$; б) $\arccos(\sin 0{,}7\pi)$; в) $\arccos(\cos 4)$.

III вариант

1. Изобразите на единичной окружности все точки, соответствующие углам $\alpha = \arcsin\frac{2}{3}$, $\beta = \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$, $\gamma = \arccos\frac{2}{3}$, $\varphi = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

2. Вычислите:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; в) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\arccos(-1)$.

Упростите (3—4).

3. а) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{7}\right)$; б) $\cos\left(\arccos\frac{4}{9}\right)$;

в) $\sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$; г) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$.

4. а) $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right)$; б) $\arccos(\sin 0{,}8\pi)$; в) $\arcsin(\sin 2)$.

IV вариант

1. Изобразите на единичной окружности все точки, соответствующие углам $\alpha = \arcsin\frac{3}{4}$, $\beta = \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$, $\gamma = \arccos\frac{3}{4}$, $\varphi = \arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$.

2. Вычислите:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arcsin(-1)$; в) $\arccos\frac{1}{2}$; г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Упростите (3—4).

3. а) $\sin\left(\arcsin\frac{4}{7}\right)$; б) $\cos\left(\arccos\frac{5}{9}\right)$;

в) $\sin\left(\arccos\frac{12}{13}\right)$; г) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$.

4. а) $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{7}\right)$; б) $\arccos(\sin 0{,}9\pi)$; в) $\arccos(\cos 5)$.

С—29 Тангенс и котангенс угла

I вариант

1. Определите тангенс и котангенс острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 34).

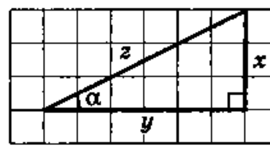

Рис. 34

2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α, β и γ (рис. 35). Определите значения тангенса и котангенса этих углов.
3. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие всем таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

а) $\operatorname{tg}\alpha = -1$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Запишите все такие углы α.

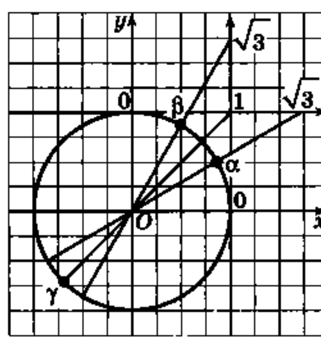

Рис. 35

II вариант

1. Определите тангенс и котангенс острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 36).

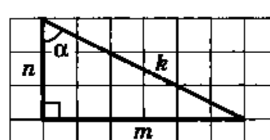

Рис. 36

2. На единичной окружности отмечены точки, соответствую-

щие углам α, β и γ (рис. 37). Определите значения тангенса и котангенса этих углов.

3. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие всем таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

   а) $\operatorname{tg}\alpha = 0$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

   в) $\operatorname{ctg}\alpha = -1$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$.

   Запишите все такие углы α.

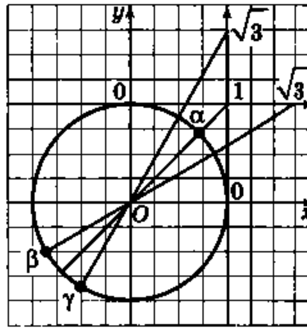

Рис. 37

III вариант

1. Определите тангенс и котангенс острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 38).

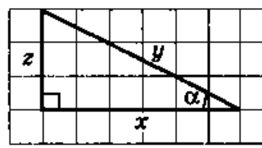

Рис. 38

2. На единичной окружности отмечены точки, соответствующие углам α, β и γ (рис. 39). Определите значения тангенса и котангенса этих углов.
3. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие всем таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

   а) $\operatorname{tg}\alpha = 0$; б) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

   в) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$.

   Запишите все такие углы α.

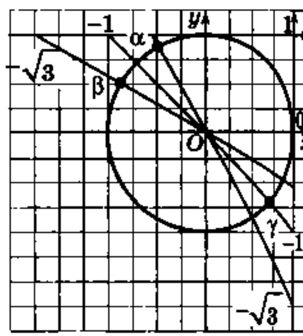

Рис. 39

IV вариант

1. Определите тангенс и котангенс острого угла α прямоугольного треугольника (рис. 40).

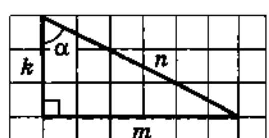

Рис. 40

2. На единичной окружности отмечены точки, соответствую-

щие углам α, β и γ (рис. 41). Определите значения тангенса и котангенса этих углов.

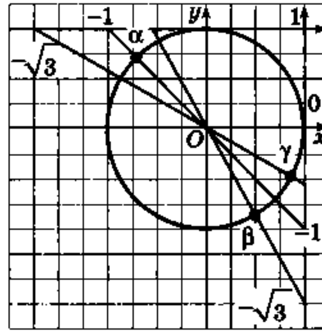

Рис. 41

3. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие всем таким углам α, для каждого из которых справедливо равенство:

   а) $\operatorname{tg}\alpha = 1$; б) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$;

   в) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

   Запишите все такие углы α.

С–30 Формулы для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$

I вариант

1. Вычислите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
2. Вычислите $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\cdot\cos\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}4$.
3. Докажите равенство $\frac{(\operatorname{tg}(-\alpha) - 1)(\operatorname{ctg}(\alpha + 5\pi) - 1)}{(\operatorname{tg}(\alpha - 4\pi) - 1)(\operatorname{ctg}(-\alpha) - 1)} = -1$, для тех α, для которых определена левая часть равенства.

II вариант

1. Вычислите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
2. Вычислите $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\cdot\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}6$.
3. Докажите равенство $\frac{(\operatorname{tg}(\alpha + 7\pi) + 1)(\operatorname{ctg}(-\alpha) + 1)}{(\operatorname{tg}(-\alpha) + 1)(\operatorname{ctg}\alpha + 1)} = -1$, для тех α, для которых определена левая часть равенства.

III вариант

1. Вычислите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{12}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
2. Вычислите $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha) : (\sin\alpha - \cos\alpha)$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}2$.
3. Докажите равенство $\frac{(\operatorname{tg}(-\alpha) - 1)(\operatorname{ctg}(\alpha - 9\pi) + 1)}{(\operatorname{tg}(\alpha + 3\pi) + 1)(\operatorname{ctg}(-\alpha) - 1)} = 1$, для тех α, для которых определена левая часть равенства.

IV вариант

1. Вычислите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{15}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.
2. Вычислите $(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha) : (\sin\alpha + \cos\alpha)$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = -1,2$.
3. Докажите равенство $\frac{(\operatorname{tg}(-\alpha)+1)(\operatorname{ctg}(\alpha-8\pi)-1)}{(\operatorname{tg}(\alpha+5\pi)-1)(\operatorname{ctg}(-\alpha)+1)} = 1$, для тех α, для которых определена левая часть равенства.

С—31* Арктангенс и арккотангенс

I вариант

1. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие углам $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{7}{4}$, $\beta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$, $\gamma = \operatorname{arcctg}\frac{3}{4}$, $\varphi = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{7}{4}\right)$.
2. Вычислите:

   а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; в) $\operatorname{arcctg}(-1)$; г) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
3. Вычислите:

   а) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{12}{13}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{15}{14}\right)\right)$;

   в) $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$; г) $\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}\right)$.
4. Вычислите $\cos(\operatorname{arctg} a)$.

II вариант

1. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие углам $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{5}{4}$, $\beta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right)$, $\gamma = \operatorname{arcctg}\frac{1}{4}$, $\varphi = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{5}{4}\right)$.
2. Вычислите:

   а) $\operatorname{arctg}(-1)$; б) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; в) $\operatorname{arcctg} 1$; г) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

3. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{7}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{11}\right)\right)$;

в) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right)$; г) $\cos\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$.

4. Вычислите $\sin(\operatorname{arcctg} a)$.

III вариант

1. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие углам $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$, $\beta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)$, $\gamma = \operatorname{arcctg}\frac{2}{3}$, $\varphi = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{5}{3}\right)$.

2. Вычислите:

а) $\operatorname{arctg} 0$; б) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; в) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

3. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{7}{8}\right)\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{13}{12}\right)$;

в) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{12}{5}\right)$; г) $\cos\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{15}{8}\right)\right)$.

4. Вычислите $\sin(\operatorname{arctg} a)$.

IV вариант

1. Изобразите на единичной окружности точки, соответствующие углам $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$, $\beta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right)$, $\gamma = \operatorname{arcctg}\frac{4}{3}$, $\varphi = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)$.

2. Вычислите:

а) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\operatorname{arcctg} 0$; г) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$.

3. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{13}{17}\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{12}{11}\right)\right)$;

в) $\sin\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{8}{15}\right)\right)$; г) $\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{5}{12}\right)$.

4. Вычислите $\cos(\operatorname{arcctg} a)$.

С—32 Косинус суммы и косинус разности двух углов. Синус суммы и синус разности двух углов

I вариант

1. Вычислите:
   а) $\cos 54^\circ \cos 6^\circ - \sin 54^\circ \sin 6^\circ$;
   б) $\cos \frac{3\pi}{10} \cos \frac{\pi}{20} + \sin \frac{\pi}{20} \sin \frac{3\pi}{10}$.

2. Упростите выражение
   $$\sin(3x + 2y)\cos(x + 2y) - \sin(x + 2y)\cos(3x + 2y).$$

3. Вычислите $\frac{\sin 13^\circ \cos 47^\circ + \sin 47^\circ \cos 13^\circ}{\cos 98^\circ \cos 38^\circ + \sin 98^\circ \sin 38^\circ}$.

4. Сравните $\frac{\sin 58^\circ \cos 52^\circ + \sin 52^\circ \cos 58^\circ}{\cos 68^\circ \cos 42^\circ - \sin 42^\circ \sin 68^\circ}$ и $\frac{\sin 48^\circ + \cos 48^\circ}{\cos 24^\circ - \sin 24^\circ}$.

5. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения $\sin x + \cos x$.

6. Вычислите $\sin\left(\arcsin 0{,}6 + \arcsin \frac{12}{13}\right)$.

II вариант

1. Вычислите:
   а) $\cos 72^\circ \cos 42^\circ + \sin 72^\circ \sin 42^\circ$;
   б) $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{15} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}$.

2. Упростите выражение
   $$\sin(2x + 3y)\cos(x - 3y) + \sin(x - 3y)\cos(2x + 3y).$$

3. Вычислите $\frac{\sin 54^\circ \cos 24^\circ - \sin 24^\circ \cos 54^\circ}{\cos 57^\circ \cos 27^\circ + \sin 57^\circ \sin 27^\circ}$.

4. Сравните $\frac{\sin 59^\circ \cos 61^\circ + \sin 61^\circ \cos 59^\circ}{\cos 58^\circ \cos 62^\circ - \sin 62^\circ \sin 58^\circ}$ и $\frac{\sin 36^\circ + \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ - \sin 18^\circ}$.

5. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения $\sin x - \cos x$.

6. Вычислите $\sin\left(\arcsin \frac{5}{13} - \arcsin 0{,}8\right)$.

III вариант

1. Вычислите:
   а) $\sin 28^\circ \cos 17^\circ + \sin 17^\circ \cos 28^\circ$;
   б) $\sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{7\pi}{30} - \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{7\pi}{30}$.

2. Упростите выражение
$$\cos(3x - 2y)\cos(x - 2y) + \sin(3x - 2y)\sin(x - 2y).$$

3. Вычислите $\frac{\cos 59^\circ \cos 29^\circ + \sin 59^\circ \sin 29^\circ}{\sin 73^\circ \cos 43^\circ - \sin 43^\circ \cos 73^\circ}$.

4. Сравните $\frac{\sin 67^\circ \cos 73^\circ + \sin 73^\circ \cos 67^\circ}{\cos 55^\circ \cos 65^\circ - \sin 55^\circ \sin 65^\circ}$ и $\frac{\sin 36^\circ + \cos 36^\circ}{1 - \cos 72^\circ + \sin 72^\circ}$.

5. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения $\sqrt{3}\sin x + \cos x$.

6. Вычислите $\cos\left(\arccos \frac{12}{13} + \arccos 0{,}8\right)$.

IV вариант

1. Вычислите:
   а) $\sin 111^\circ \cos 21^\circ - \sin 21^\circ \cos 111^\circ$;
   б) $\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{21} + \sin \frac{4\pi}{21} \cos \frac{\pi}{7}$.

2. Упростите выражение
$$\cos(5x - 2y)\cos(x - 2y) + \sin(5x - 2y)\sin(x - 2y).$$

3. Вычислите $\frac{\cos 23^\circ \cos 22^\circ - \sin 23^\circ \sin 22^\circ}{\sin 19^\circ \cos 26^\circ + \sin 26^\circ \cos 19^\circ}$.

4. Сравните $\frac{\sin 56^\circ \cos 79^\circ + \sin 79^\circ \cos 56^\circ}{\cos 66^\circ \cos 44^\circ - \sin 66^\circ \sin 44^\circ}$ и $\frac{\sin 37^\circ + \cos 37^\circ}{1 - \cos 74^\circ + \sin 74^\circ}$.

5. Найдите наименьшее и наибольшее значения выражения $\sin x - \sqrt{3}\cos x$.

6. Вычислите $\cos\left(\arccos 0{,}6 - \arccos \frac{5}{13}\right)$.

Формулы приведения для синуса и косинуса

I вариант

1. Упростите выражение:

   а) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$; б) $\cos(3\pi+\alpha)$; в) $\sin\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$.

2. Вычислите $3\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)+2\sin(17\pi-\alpha)$, если $\sin\alpha=-0{,}2$.

3. Вычислите $\dfrac{3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-2\cos(\pi-\alpha)}{2\sin(\pi+\alpha)-3\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$, если $\operatorname{tg}\alpha=5$.

4. Докажите равенство $\dfrac{3\cos 50^\circ-4\sin 140^\circ}{\cos 130^\circ}=1$.

II вариант

1. Упростите выражение:

   а) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\sin(3\pi+\alpha)$; в) $\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$.

2. Вычислите $2\sin\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)-5\cos(17\pi-\alpha)$, если $\cos\alpha=-0{,}3$.

3. Вычислите $\dfrac{3\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+2\sin(\pi-\alpha)}{2\cos(\pi+\alpha)-3\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$, если $\operatorname{tg}\alpha=4$.

4. Докажите равенство $\dfrac{4\cos 25^\circ-3\sin 65^\circ}{\sin 115^\circ}=1$.

III вариант

1. Упростите выражение:

   а) $\sin\left(\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)$; б) $\cos(5\pi+\alpha)$; в) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

2. Вычислите $4\cos\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)-5\sin(15\pi-\alpha)$, если $\sin\alpha=-0{,}4$.

3. Вычислите $\dfrac{2\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)-3\cos(\pi-\alpha)}{3\sin(\pi+\alpha)-2\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 5$.

4. Докажите равенство $\dfrac{5\sin 140^\circ + 4\cos 130^\circ}{\cos 210^\circ} = 1$.

IV вариант

1. Упростите выражение:

   а) $\cos\left(\dfrac{9\pi}{2}+\alpha\right)$; б) $\sin(5\pi+\alpha)$; в) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

2. Вычислите $5\sin\left(\dfrac{13\pi}{2}+\alpha\right)-4\cos(19\pi-\alpha)$, если $\cos\alpha = -0{,}3$.

3. Вычислите $\dfrac{2\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)-3\cos(\pi+\alpha)}{3\sin(\pi-\alpha)-2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 4$.

4. Докажите равенство $\dfrac{5\cos 20^\circ - 4\sin 110^\circ}{\cos 340^\circ} = 1$.

С–34 Сумма и разность синусов и косинусов

I вариант

1. Запишите в виде произведения:
   а) $\sin 70^\circ + \sin 50^\circ$; б) $\sin 70^\circ - \sin 50^\circ$;
   в) $\cos 70^\circ + \cos 50^\circ$; г) $\cos 70^\circ - \cos 50^\circ$.
2. Докажите равенство $\sin 200^\circ + \sin 100^\circ = \sin 40^\circ$.
3. Вычислите $\sin\dfrac{7\pi}{12}+\sin\dfrac{\pi}{12}+\cos\dfrac{\pi}{12}-\cos\dfrac{7\pi}{12}$.
4. Запишите в виде произведения $\sin 13^\circ + \sin 15^\circ + \sin 17^\circ$.
5. Докажите равенство $\dfrac{1}{2\sin 50^\circ} + 2\sin 10^\circ = 1$.

II вариант

1. Запишите в виде произведения:
   а) $\sin 80^\circ + \sin 40^\circ$; б) $\sin 80^\circ - \sin 40^\circ$;
   в) $\cos 80^\circ + \cos 80^\circ$; г) $\cos 80^\circ - \cos 40^\circ$.

2. Докажите равенство $\sin 160° - \sin 100° = -\cos 50°$.

3. Вычислите $\sin\frac{13\pi}{12} + \sin\frac{7\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}$.

4. Запишите в виде произведения $\sin 19° + \sin 17° + \sin 15°$.

5. Докажите равенство $2\sin 50° - \frac{1}{2\sin 70°} = 1$.

III вариант

1. Запишите в виде произведения:
   а) $\sin 110° + \sin 50°$; б) $\sin 110° - \sin 50°$;
   в) $\cos 110° + \cos 50°$; г) $\cos 110° - \cos 50°$.

2. Докажите равенство $\cos 140° + \cos 80° = -\sqrt{3}\sin 20°$.

3. Вычислите $\sin\frac{11\pi}{30} - \sin\frac{\pi}{30} - \cos\frac{8\pi}{15} - \cos\frac{2\pi}{15}$.

4. Запишите в виде произведения
$$\cos 110° + \cos 105° + \cos 100°.$$

5. Докажите равенство $\frac{\sqrt{3}}{2\sin 40°} - 2\sin 10° = 1$.

IV вариант

1. Запишите в виде произведения:
   а) $\sin 130° + \sin 10°$; б) $\sin 130° - \sin 10°$;
   в) $\cos 130° + \cos 10°$; г) $\cos 130° - \cos 10°$.

2. Докажите равенство $\cos 160° - \cos 40° = \sqrt{3}\cos 10°$.

3. Вычислите $\sin\frac{13\pi}{42} - \sin\frac{\pi}{42} + \cos\frac{10\pi}{21} - \cos\frac{4\pi}{21}$.

4. Запишите в виде произведения
$$\cos 105° + \cos 100° + \cos 95°.$$

5. Докажите равенство $2\sin 70° - \frac{\sqrt{3}}{2\sin 80°} = 1$.

С—35 Формулы синусов и косинусов двойных и половинных углов

I вариант

1. Вычислите:
   а) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; б) $\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Вычислите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}6$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

3. Докажите равенство $\sin 2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$, если $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. Вычислите: а) $\sin 15°$; б) $\cos 22°30'$.

5. Вычислите $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ и $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{8}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

II вариант

1. Вычислите:

   а) $2\sin\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$; б) $\left(\cos\dfrac{\pi}{8} - \sin\dfrac{\pi}{8}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{8} + \sin\dfrac{\pi}{8}\right)$.

2. Вычислите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}8$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

3. Докажите равенство $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$, если $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. Вычислите: а) $\sin 22°30'$; б) $\cos 15°$.

5. Вычислите $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ и $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\dfrac{1}{8}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

III вариант

1. Вычислите:

   а) $2\sin\dfrac{7\pi}{12}\cos\dfrac{7\pi}{12}$; б) $\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} - \sin\dfrac{5\pi}{12}\right)\left(\cos\dfrac{5\pi}{12} + \sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

2. Вычислите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{5}{13}$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

3. Докажите равенство $\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$, если $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. Вычислите: а) $\sin 75°$; б) $\cos 67°30'$.

5. Вычислите $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ и $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{18}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

IV вариант

1. Вычислите:

   а) $2\sin\dfrac{5\pi}{12}\cos\dfrac{5\pi}{12}$; б) $\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} - \sin\dfrac{7\pi}{12}\right)\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + \sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

2. Вычислите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

3. Докажите равенство $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$, если $\alpha \neq \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

4. Вычислите: а) $\sin 67°30'$; б) $\cos 75°$.

5. Вычислите $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ и $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha = -\dfrac{1}{18}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

С—36 Произведения синусов и косинусов

I вариант

1. Запишите в виде суммы или разности:
а) $\sin 33° \cos 27°$; б) $\cos 47° \cos 2°$; в) $\sin 24° \sin 6°$.
2. Вычислите:
а) $\sin 35° \cos 25° - \sin 20° \cos 10°$;
б) $\cos\dfrac{7\pi}{36}\cos\dfrac{5\pi}{36} - \sin\dfrac{\pi}{9}\sin\dfrac{\pi}{18}$.

II вариант

1. Запишите в виде суммы или разности:
а) $\sin 35° \cos 5°$; б) $\cos 37° \cos 23°$; в) $\sin 36° \sin 24°$.
2. Вычислите:
а) $\sin 70° \cos 65° - \sin 25° \cos 20°$;
б) $\cos\dfrac{\pi}{9}\cos\dfrac{\pi}{18} - \sin\dfrac{7\pi}{36}\sin\dfrac{5\pi}{36}$.

III вариант

1. Запишите в виде суммы или разности:
а) $\sin 34° \cos 11°$; б) $\cos 49° \cos 19°$; в) $\sin 26° \sin 54°$.
2. Вычислите:
а) $\sin 26° \cos 34° + \sin 19° \cos 11°$;
б) $\cos\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{24} - \sin\dfrac{5\pi}{24}\sin\dfrac{\pi}{8}$.

IV вариант

1. Запишите в виде суммы или разности:
а) $\sin 32° \cos 13°$; б) $\cos 41° \cos 11°$; в) $\sin 41° \sin 16°$.
2. Вычислите:
а) $\sin 25° \cos 5° + \sin 20° \cos 40°$;
б) $\cos\dfrac{5\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{8} - \sin\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{24}$.

I вариант

1. Вычислите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{4}$.
2. Вычислите:
   а) $\frac{\operatorname{tg}48^\circ-\operatorname{tg}18^\circ}{1+\operatorname{tg}48^\circ\operatorname{tg}18^\circ}$; б) $\frac{\operatorname{tg}21^\circ+\operatorname{tg}39^\circ}{1-\operatorname{tg}21^\circ\operatorname{tg}39^\circ}$.
3. Докажите равенство $\frac{\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}{1+\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}2\alpha}+\frac{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}=2\operatorname{tg}\alpha$ для тех α, для которых определены обе его части.
4. Вычислите $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{5}$.
5. Вычислите $\operatorname{tg}75^\circ$.

II вариант

1. Вычислите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{6}$.
2. Вычислите:
   а) $\frac{\operatorname{tg}87^\circ-\operatorname{tg}27^\circ}{1+\operatorname{tg}87^\circ\operatorname{tg}27^\circ}$; б) $\frac{\operatorname{tg}16^\circ+\operatorname{tg}14^\circ}{1-\operatorname{tg}16^\circ\operatorname{tg}14^\circ}$.
3. Докажите равенство $\frac{\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}3\alpha}{1+\operatorname{tg}4\alpha\operatorname{tg}3\alpha}+\frac{\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}{1+\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}2\alpha}=2\operatorname{tg}\alpha$ для тех α, для которых определены обе его части.
4. Вычислите $\operatorname{tg}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$.
5. Вычислите $\operatorname{tg}105^\circ$.

III вариант

1. Вычислите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{5}$.
2. Вычислите:
   а) $\frac{\operatorname{tg}94^\circ-\operatorname{tg}64^\circ}{1+\operatorname{tg}94^\circ\operatorname{tg}64^\circ}$; б) $\frac{\operatorname{tg}43^\circ+\operatorname{tg}17^\circ}{1-\operatorname{tg}43^\circ\operatorname{tg}17^\circ}$.
3. Докажите равенство $\frac{\operatorname{tg}5\alpha-\operatorname{tg}3\alpha}{1+\operatorname{tg}5\alpha\operatorname{tg}3\alpha}+\frac{\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}\alpha}=2\operatorname{tg}2\alpha$ для тех α, для которых определены обе его части.

4. Вычислите $\operatorname{tg} 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{8}$.

5. Вычислите $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$.

IV вариант

1. Вычислите $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{5}$.

2. Вычислите:
   а) $\frac{\operatorname{tg} 92^\circ - \operatorname{tg} 32^\circ}{1+\operatorname{tg} 92^\circ \operatorname{tg} 32^\circ}$; б) $\frac{\operatorname{tg} 11^\circ + \operatorname{tg} 19^\circ}{1-\operatorname{tg} 11^\circ \operatorname{tg} 19^\circ}$.

3. Докажите равенство $\frac{\operatorname{tg} 6\alpha - \operatorname{tg} 4\alpha}{1+\operatorname{tg} 6\alpha \operatorname{tg} 4\alpha} + \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{1+\operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha} = 2\operatorname{tg} 2\alpha$ для тех α, для которых определены обе его части.

4. Вычислите $\operatorname{tg} 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{6}$.

5. Вычислите $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$.

С—38 Тригонометрические функции

I вариант

1. Постройте график функции $y = \sin x$.

2. Определите промежутки возрастания функции $y = \sin\frac{x}{2}$.

3. Докажите четность (или нечетность) функции
$$y = \sin 3x - \sin x.$$

4. Определите главный период функции $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

5. Определите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 5\cos^2 7x + 3\sin^2 7x$.

6. Постройте график функции $f(x) = \frac{|\sin x| + \sin x}{2}$.

II вариант

1. Постройте график функции $y = \cos x$.

2. Определите промежутки возрастания функции $y = \cos\frac{x}{2}$.

3. Докажите четность (или нечетность) функции
$$y = \cos 5x - \cos 3x.$$

4. Определите главный период функции
$$f(x) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}.$$
5. Определите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2\cos^2 6x + 5\sin^2 6x$.
6. Постройте график функции $f(x) = \frac{|\cos x| + \cos x}{2}$.

III вариант

1. Постройте график функции $y = \operatorname{tg} x$.
2. Определите промежутки возрастания функции $y = \operatorname{tg} 2x$.
3. Докажите четность (или нечетность) функции
$$y = \sin 4x + \sin 2x.$$
4. Определите главный период функции
$$f(x) = \sin 4x \cos 3x - \sin 3x \cos 4x.$$
5. Определите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 14\cos^2 21x + 11\sin^2 21x$.
6. Постройте график функции $f(x) = \frac{\sin 2x}{2|\sin x|}$.

IV вариант

1. Постройте график функции $y = \operatorname{ctg} x$.
2. Определите промежутки убывания функции $y = \operatorname{ctg} 3x$.
3. Докажите четность (или нечетность) функции
$$y = \cos 7x + \cos 3x.$$
4. Определите главный период функции
$$f(x) = \cos 3x \cos 2x + \sin 2x \sin 3x.$$
5. Определите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 12\cos^2 22x + 10\sin^2 22x$.
6. Постройте график функции $f(x) = \frac{\sin 2x}{2|\cos x|}$.

С—39 Тригонометрические уравнения

I вариант

Решите уравнение (1—4).

1. а) $\sin x = 1$; б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin x = \frac{1}{2}$; г) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. а) $\operatorname{tg} x = -1$; б) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. а) $\sin x = \frac{1}{5}$; б) $\cos x = -\frac{1}{6}$; в) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$; г) $\cos x = \frac{\pi}{2}$.

4. $\sin x + 2\sin x\cos x - 4\cos x - 2 = 0$.

II вариант

Решите уравнение (1—4).

1. а) $\cos x = 1$; б) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos x = \frac{1}{2}$; г) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. а) $\operatorname{ctg} x = -1$; б) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; в) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. а) $\cos x = \frac{1}{6}$; б) $\sin x = -\frac{1}{5}$; в) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$; г) $\sin x = \frac{\pi}{2}$.

4. $\sin x - 2\sin x\cos x + 4\cos x - 2 = 0$.

III вариант

Решите уравнение (1—4).

1. а) $\sin x = -1$; б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin x = -\frac{1}{2}$; г) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. а) $\operatorname{tg} x = 1$; б) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. а) $\sin x = -\frac{1}{7}$; б) $\cos x = \frac{1}{8}$; в) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$; г) $\cos x = -\frac{\pi}{2}$.

4. $2\sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\sin x\cos x - \cos x - 2 = 0$.

IV вариант

Решите уравнение (1—4).

1. а) $\cos\alpha = -1$; б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; г) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. а) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$; б) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$; в) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. а) $\cos\alpha = -\frac{1}{8}$; б) $\sin\alpha = \frac{1}{7}$; в) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$; г) $\sin\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

4. $2\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\sin x\cos x + \cos x - 2 = 0$.

Замена неизвестного при решении тригонометрических уравнений

I вариант

Решите уравнение (1—5).

1. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

2. $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0.$

3. $\sin^2 x + 3\sin x - 4 = 0.$

4. $\operatorname{tg} x + \frac{5}{\operatorname{tg} x} - 6 = 0.$

5. $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2\operatorname{ctg} x + 2 = 0.$

II вариант

Решите уравнение (1—5).

1. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$

2. $\sin^2 x + 5\sin x + 4 = 0.$

3. $\cos^2 x + 4\cos x + 3 = 0.$

4. $\operatorname{ctg} x + \frac{4}{\operatorname{ctg} x} + 5 = 0.$

5. $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 2 = 0.$

III вариант

Решите уравнение (1—5).

1. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$

2. $\cos^2 x - 3\cos x - 4 = 0.$

3. $2\sin^2 \pi x + 5\sin \pi x - 7 = 0.$

4. $\operatorname{ctg} x + \frac{5}{2\operatorname{ctg} x - 1} - 6 = 0.$

5. $\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 4 = 0.$

IV вариант

Решите уравнение (1—5).

1. $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

2. $\sin^2 x - 5\sin x - 6 = 0.$

3. $3\cos^2 \pi x + 4\cos \pi x - 7 = 0.$

4. $\operatorname{tg} x + \frac{4}{3\operatorname{tg} x + 2} + 5 = 0.$

5. $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^2 x - 9\operatorname{ctg} x - 9 = 0.$

С—41 Применение тригонометрических формул при решении уравнений

I вариант

Решите уравнение (1—5).

1. $2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0.$
2. $\sin 4x \cos 2x = \sin 2x \cos 4x.$
3. $\cos 2x - \sin x = 0.$
4. $\cos(0,5\pi - 2x) + \sin x = 0.$
5. $\cos^4 x - \cos 2x = 1.$

II вариант

Решите уравнение (1—5).

1. $2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0.$
2. $\sin 3x \cos x = \sin x \cos 3x.$
3. $\cos 2x - \cos x = 0.$
4. $\cos(0,5\pi + 2x) + \sin x = 0.$
5. $\sin^4 x + \cos 2x = 1.$

III вариант

Решите уравнение (1—5).

1. $2\cos^2 \pi x + \sin \pi x - 1 = 0.$
2. $\sin^4 x + \cos^4 x - \cos 2x = 0,5.$
3. $\cos 2x + 3\sin x + 1 = 0.$
4. $\cos(1,5\pi - 2x) - \cos x = 0.$
5. $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)\cos x - \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

IV вариант

Решите уравнение (1—5).

1. $2\sin^2 \pi x - \cos \pi x - 1 = 0.$
2. $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos 2x = 0,5.$
3. $\cos 2x + 3\cos x - 1 = 0.$
4. $\cos(1,5\pi + 2x) - \cos x = 0.$
5. $\cos\left(4x - \dfrac{\pi}{4}\right)\cos x + \sin\left(4x - \dfrac{\pi}{4}\right)\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

С—42 Однородные уравнения

I вариант

Решите уравнение (1—4).

1. $\sin x + 5\cos x = 0.$
2. $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 0.$
3. $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0.$

4. $6\cos^2 x + 4\sin x\cos x = 1.$

5. Определите все a, при каждом из которых уравнение

$$\sin^2 x + 6\sin x\cos x + a\cos^2 x = 0$$

не имеет решения.

II вариант

Решите уравнение (1—4).

1. $\sin x - 5\cos x = 0.$
2. $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 0.$
3. $\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0.$
4. $5\cos^2 x + 3\sin x\cos x = 1.$
5. Определите все a, при каждом из которых уравнение

$$\sin^2 x - 4\sin x\cos x + a\cos^2 x = 0$$

не имеет решения.

III вариант

Решите уравнение (1—4).

1. $2\sin x + 3\cos x = 0.$
2. $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 0.$
3. $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0.$
4. $3\cos^2 x + 5\sin x\cos x = -1.$
5. Определите все a, при каждом из которых уравнение

$$\sin^2 x + 5\sin x\cos x + a\cos^2 x = 0$$

не имеет решения.

IV вариант

Решите уравнение (1—4).

1. $2\sin x - 3\cos x = 0.$
2. $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 0.$
3. $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0.$
4. $2\cos^2 x + 4\sin x\cos x = -1.$
5. Определите все a, при каждом из которых уравнение

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + a\cos^2 x = 0$$

не имеет решения.

I вариант

Решите неравенство (1—4).

1. а) $\sin x > -\frac{1}{2}$; б) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.
2. а) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) \geqslant -\frac{1}{2}$.
3. $2\cos^2 x + \sqrt{2}\sin x > 2$.
4. Определите все a, при каждом из которых неравенство $4\sin x + 3\cos x \leqslant a$ имеет хотя бы одно решение.

II вариант

Решите неравенство (1—4).

1. а) $\sin x < -\frac{1}{2}$; б) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.
2. а) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $2\sin^2 x - \cos x > 2$.
4. Определите все a, при каждом из которых неравенство $3\sin x - 4\cos x \leqslant a$ имеет хотя бы одно решение.

III вариант

Решите неравенство (1—4).

1. а) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$.
2. а) $\sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) \geqslant \frac{1}{2}$; б) $\cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $4\cos^2 x - (2\sqrt{2} - 2)\sin x > 4 - \sqrt{2}$.
4. Определите все a, при каждом из которых неравенство $5\sin x + 12\cos x \leqslant a - 1$ не имеет решений.

IV вариант

Решите неравенство (1—4).

1. а) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. а) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \leqslant -\frac{1}{2}$.
3. $4\sin^2 x + (2\sqrt{2} - 2)\cos x > 4 - \sqrt{2}$.
4. Определите все a, при каждом из которых неравенство $5\sin x - 12\cos x \leqslant a + 1$ не имеет решений.

С—44* Введение вспомогательного угла. Замена $t = \sin x + \cos x$

I вариант

Решите уравнение (1—2).
1. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = -1$.
2. $\sin x + 4\sin x\cos x + \cos x = 1$.

Решите неравенство (3—4).
3. $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x > 1$.
4. $3\sin x - 3\cos x + 2\sin x\cos x > 3$.
5. Определите все a, при каждом из которых уравнение $5\sin x - 12\cos x = a + 1$ имеет хотя бы одно решение.

II вариант

Решите уравнение (1—2).
1. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -1$.
2. $\sin x + 4\sin x\cos x - \cos x = -1$.

Решите неравенство (3—4).
3. $2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x > 1$.
4. $\sin x + \cos x - 2\sin x\cos x > -1$.
5. Определите все a, при каждом из которых уравнение $5\sin x + 12\cos x = a - 2$ имеет хотя бы одно решение.

III вариант

Решите уравнение (1—2).
1. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$.
2. $5\sin x + 4\sin x\cos x + 5\cos x = -5$.

Решите неравенство (3—4).
3. $2\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x\cos x > \sqrt{3}$.
4. $\sin x - \cos x - 2\sin x\cos x < 1$.
5. Определите все a, при каждом из которых уравнение $12\sin x - 5\cos x = a + 3$ имеет хотя бы одно решение.

IV вариант

Решите уравнение (1—2).

1. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$.
2. $5\sin x + 4\sin x\cos x - 5\cos x = 5$.

Решите неравенство (3—4).

3. $2\sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x\cos x > \sqrt{3}$.
4. $3\sin x + 3\cos x + 2\sin x\cos x < -3$.
5. Определите все a, при каждом из которых уравнение $5\sin x + 12\cos x = a - 4$ имеет хотя бы одно решение.

С—45* Замена неизвестных при решении систем уравнений

I вариант

Решите систему уравнений (1—4).

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3^x + 2^{\frac{x+2}{2} - y} = 90. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{3x}{2x+y} + 6x + 3y = 9 \\ 12 \cdot 13^{2x+y} + 13 = 13^{4x+2y}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3\cos x + \sin y = 0{,}5 \\ 2\cos x - \sin y = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{5}{\sqrt{x-3}} + \dfrac{2}{\sqrt{y+1}} = 6 \\ \dfrac{3}{\sqrt{x-3}} - \dfrac{2}{\sqrt{y+1}} = 2. \end{cases}$

II вариант

Решите систему уравнений (1—4).

1. $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 2^x + 2^{\frac{x+7}{2} - y} = 16. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3x-y} + 15x - 5y = 7 \\ 11 \cdot 12^{3x-y} + 12 = 12^{6x-2y}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4\sin x + \cos y = 1 \\ 3\sin x + \cos y = 2{,}5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{x+2}} - \dfrac{3}{\sqrt{y-1}} = 3 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+2}} + \dfrac{3}{\sqrt{y-1}} = 3. \end{cases}$

III вариант

Решите систему уравнений (1—4).

1. $\begin{cases} 3x+2y=3 \\ 3^y-2\cdot 3^{\frac{x-1}{2}+y}=9. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{4x-5y}{5x-7y}+10x-14y=4 \\ 4\cdot 5^{5x-7y}+5=5^{10x-8y}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3\sin x+2\cos y=0{,}5 \\ 2\sin x-3\cos y=-4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{2}{\sqrt{y+2}}=12 \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{3}{\sqrt{y+2}}=1. \end{cases}$

IV вариант

Решите систему уравнений (1—4).

1. $\begin{cases} 4x+3y=8 \\ 2^y-3\cdot 2^{\frac{x-3}{2}+y}=4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{5x-4y}{4x-5y}+12x-15y=11 \\ 6\cdot 7^{4x-5y}+7=7^{8x-10y}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3\cos x+4\sin y=2{,}5 \\ 4\cos x-3\sin y=-5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{x+2}}-\dfrac{2}{\sqrt{y-3}}=7 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{3}{\sqrt{y-3}}=22. \end{cases}$

Контрольные работы

К—1 *I вариант*

1. Упростите выражение $\left(\frac{8a}{a^2-b^2}+\frac{3}{b-a}-\frac{4}{a+b}\right):\frac{1}{5a-5b}$.

2. Решите уравнение $\frac{2x+3}{x^2-2x}-\frac{x-3}{x^2+2x}=0$.

3. Решите неравенство:

   а) $\frac{(x-2)(x+2)}{x-3}<0$; б) $\frac{x^2-10x+25}{x^2-4x-12}\geqslant 0$.

4*. а) Упростите выражение $\left(\frac{1}{n^2-n}+\frac{1}{n^2+n}\right):\frac{n+3}{n^2-1}$.

   б) Найдите значение полученного выражения при $n=-1$

5*. Докажите справедливость неравенства:

   а) $x^2+y^2-2x+4y+5\geqslant 0$;

   б) $x^4-3x^2-2x+6>0$;

   в) $x^2+2x+\frac{1}{x^2+2x+2}\geqslant 0$.

6*. Решите уравнение $x^4-x^3-3x^2+4x-4=0$.

7*. К двузначному числу приписали цифру 1 сначала спра ва, потом слева, получились два числа, разность кото рых равна 234. Найдите это двузначное число.

К—1 *II вариант*

1. Упростите выражение $\left(\frac{6a}{a^2-b^2}-\frac{2}{a+b}+\frac{3}{b-a}\right):\frac{1}{4a+4b}$.

2. Решите уравнение $\frac{2x+4}{x^2-x}-\frac{x-4}{x^2+x}=0$.

3. Решите неравенство:

   а) $\frac{(x-2)(x-4)}{x+3}<0$; б) $\frac{x^2-8x+16}{x^2-3x-10}\geqslant 0$.

4*. а) Упростите выражение $\left(\frac{1}{n^2-n}-\frac{1}{n^2+n}\right):\frac{n-2}{n^2-1}$.

б) Найдите значение полученного выражения при $n=-1$.

5*. Докажите справедливость неравенства:

а) $x^2+y^2-4x+2y+5\geqslant 0$;

б) $x^4-5x^2-2x+11>0$;

в) $x^2-2x+\frac{1}{x^2-2x+2}\geqslant 0$.

6*. Решите уравнение $x^4+x^3-8x^2-9x-9=0$.

7*. К двузначному числу приписали цифру 4 сначала справа, потом слева, получились два числа, разность которых равна 432. Найдите это двузначное число.

К–1 *III вариант*

1. Упростите выражение $\left(\frac{10a}{a^2-b^2}+\frac{5}{b-a}-\frac{4}{a+b}\right):\frac{3}{a+b}$.

2. Решите уравнение $\frac{2x+7}{x^2+2x}-\frac{x-1}{x^2+6x+8}=0$.

3. Решите неравенство:

а) $\frac{(x+1)(x+3)}{x-2}<0$; б) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-x-20}\geqslant 0$.

4*. а) Упростите выражение $\left(\frac{1}{n^2-3n+2}+\frac{1}{n^2-n}\right):\frac{n+2}{n^2-2n}$.

б) Найдите значение полученного выражения при $n=2$.

5*. Докажите справедливость неравенства:

а) $x^2+y^2-6x+4y+13\geqslant 0$;

б) $x^4+13x^2-6x+6>0$;

в) $x^2+3>\sqrt{x^4+6x^2+8}$.

6*. Решите уравнение $x^4+4x^3-2x^2-12x+9=0$.

7*. К трехзначному числу приписали цифру 3 сначала справа, потом слева, получились два числа, разность которых равна 3114. Найдите это трехзначное число.

К—1 *IV вариант*

1. Упростите выражение $\left(\frac{-4a}{a^2-b^2}+\frac{2}{a+b}-\frac{3}{b-a}\right):\frac{2}{a-b}$.

2. Решите уравнение $\frac{2x+6}{x^2+x}-\frac{x-3}{x^2+3x+2}=0$.

3. Решите неравенство:

   а) $\frac{(x+1)(x-1)}{x+4}<0$; б) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-4x-5}\geqslant 0$.

4*. а) Упростите выражение $\left(\frac{1}{n^2+n}-\frac{1}{n^2+3n+2}\right):\frac{n-3}{n^2+2n}$.

   б) Найдите значение полученного выражения при $n=0$.

5*. Докажите справедливость неравенства:

   а) $x^2+y^2+4x-6y+13\geqslant 0$;

   б) $x^4+10x^2-4x+14>0$;

   в) $x^2+4>\sqrt{x^4+8x^2+15}$.

6*. Решите уравнение $x^4-4x^3-2x^2+12x+9=0$.

7*. К трехзначному числу приписали цифру 2 сначала справа, потом слева, получились два числа, разность которых равна 4113. Найдите это трехзначное число.

К—2 *I вариант*

1. Верно ли равенство:

   а) $\sqrt[4]{2^4}=2$; б) $\sqrt[4]{(-3)^4}=-3$; в) $\sqrt[4]{(-4)^4}=4$; г) $\sqrt[4]{5^4}=-5$?

2. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

   а) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$; б) $\frac{6}{\sqrt[3]{5}+1}$; в) $\frac{3}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}$.

3. Вычислите:

   а) $\sqrt[4]{312^2+2\cdot 312\cdot 313+313^2}$;

   б) $\sqrt[3]{1987^3-3\cdot 1987^2\cdot 987+3\cdot 1987\cdot 987^2-987^3}$.

4. Упростите выражение $(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

5*. Вычислите $\sqrt[3]{27} - \sqrt[4]{81} + \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \sqrt[4]{25} - \sqrt[4]{9}$.

6*. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$ при $x = \sqrt[3]{4^4}$.

7*. Велосипедист и пешеход отправились одновременно из пункта A в пункт B. Скорость велосипедиста была в 2 раза больше скорости пешехода, но в пути он сделал остановку для устранения поломки велосипеда и поэтому в пункт B прибыл лишь на 5 мин раньше пешехода, который на весь путь затратил 40 мин. Сколько минут велосипедист устранял поломку велосипеда?

К–2 *II вариант*

1. Верно ли равенство:

   а) $\sqrt[6]{3^6} = -3$; б) $\sqrt[6]{4^6} = 4$; в) $\sqrt[6]{(-5)^6} = 5$; г) $\sqrt[6]{(-6)^6} = -6$?

2. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

   а) $\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} - 1}$; в) $\frac{6}{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5} + 1}$.

3. Вычислите:

   а) $\sqrt[4]{800^2 - 2\cdot 800\cdot 175 + 175^2}$;

   б) $\sqrt[3]{789^3 + 3\cdot 789^2\cdot 211 + 3\cdot 789\cdot 211^2 + 211^3}$.

4. Упростите выражение $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})$.

5*. Вычислите $\sqrt[3]{125} - \sqrt[4]{625} + \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} - \sqrt[4]{36} + \sqrt[4]{4}$.

6*. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$ при $x = \sqrt[5]{27^4}$.

7*. Велосипедист и мотоциклист отправились одновременно из пункта A в пункт B. Скорость мотоциклиста была в 3 раза больше скорости велосипедиста, но в пути он сделал остановку для устранения поломки мотоцикла и поэтому в пункт B прибыл на 5 мин позже велосипедиста, который на весь путь затратил 60 мин. Сколько минут мотоциклист устранял поломку мотоцикла?

К—2 *III вариант*

1. Верно ли равенство:

   а) $\sqrt[10]{4^{10}} = 4$; б) $\sqrt[10]{(-5)^{10}} = 5$;

   в) $\sqrt[10]{6^{10}} = -6$; г) $\sqrt[10]{(-7)^{10}} = -7$?

2. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

   а) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{6}+1}$; в) $\frac{3}{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1}$.

3. Вычислите:

   а) $\sqrt[4]{2002^2 + 2 \cdot 2002 \cdot 498 + 498^2}$;

   б) $\sqrt[3]{2001^3 - 3 \cdot 2001^2 \cdot 189 + 3 \cdot 2001 \cdot 189^2 - 189^3}$.

4. Упростите выражение

$$(\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{ab} + \sqrt[3]{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}).$$

5*. Вычислите

$$\sqrt[3]{75} - \sqrt[3]{3} \cdot \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 + \frac{13}{\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{42} + \sqrt[3]{36}} - \sqrt[6]{49} - \sqrt[6]{36}.$$

6*. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\sqrt{x}}}$ при $x = \sqrt[11]{125^8}$.

7*. Моторная лодка проходит расстояние между пристанями A и B по течению реки за 20 мин, а против течения за 1 ч. Во сколько раз собственная скорость моторной лодки больше скорости течения реки?

К—2 *IV вариант*

1. Верно ли равенство:

   а) $\sqrt[8]{5^8} = -5$; б) $\sqrt[8]{6^8} = 6$;

   в) $\sqrt[8]{(-7)^8} = -7$; г) $\sqrt[8]{(-8)^8} = 8$?

2. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

   а) $\frac{2}{\sqrt[3]{9}}$; б) $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}-1}$; в) $\frac{5}{\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{6}+1}$.

3. Вычислите:

   а) $\sqrt[4]{2001^2 - 2 \cdot 2001 \cdot 401 + 401^2}$;

   б) $\sqrt[3]{1799^3 + 3 \cdot 1799^2 \cdot 203 + 3 \cdot 1799 \cdot 203^2 + 203^3}$.

4. Упростите выражение

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y})(\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{xy}+\sqrt[3]{y}).$$

5*. Вычислите

$$\sqrt[3]{48}-\sqrt[3]{3}\cdot(\sqrt[3]{4})^2+\frac{1}{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{25}}+\sqrt[6]{25}-\sqrt[6]{36}.$$

6*. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt[4]{x}}}$ при $x=\sqrt[13]{27^8}$.

7*. Моторная лодка проходит расстояние между пристанями A и B по течению реки за 25 мин, а против течения за 50 мин. Во сколько раз собственная скорость моторной лодки больше скорости течения реки?

К–3 *I вариант*

1. Найдите значение выражения $\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^6$ при $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$.

2. Вычислите $\dfrac{3^{\frac{1}{2}}\cdot 9^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{2}{3}}\cdot 4^{\frac{2}{3}}}$.

3. Постройте график функции и перечислите свойства этой функции:

а) $y=2^x$; б) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

4. Упростите выражение $\left(\dfrac{2}{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{2}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}}}{6x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}}$.

5*. Упростите выражение $\left(\dfrac{\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^2-2}{\left(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}\right)^2+2}-x\right)^{\frac{3}{4}}$ и найдите его значение при $x=0{,}9919$.

6*. Вычислите предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5n^3-n^2-4}{3n^3+11n^2+1}$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^2+4}{n^3+n^2+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$; г) $\lim\limits_{n\to+\infty}(4+5n+4n^2-3n^3)$.

7*. Велосипедист и пешеход отправились одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встретились через некоторое время. Если бы они отправились одновременно из тех же пунктов в одном направлении, то, для того чтобы догнать пешехода, велосипедисту потребовалось бы в 5 раз больше времени, чем они потратили до встречи при движении навстречу друг другу. Во сколько раз скорость велосипедиста больше скорости пешехода?

К—3 *II вариант*

1. Найдите значение выражения $\left(a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^{12}$ при $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{7}}$.

2. Вычислите $\dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{5}{4}}}{9^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}$.

3. Постройте график функции и перечислите свойства этой функции:

а) $y = 3^x$; б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

4. Упростите выражение $\left(\dfrac{3}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}} + \dfrac{3}{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}}\right) \cdot \dfrac{y^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}}{4x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}}$.

5*. Упростите выражение $\left(\dfrac{\left(x^{\frac{1}{4}} - x^{-\frac{1}{4}}\right)^2 + 2}{\left(x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)^2 - 2} - x\right)^{-\frac{3}{4}}$ и найдите его значение при $x = \dfrac{65}{81}$.

6*. Вычислите предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4n^3 - 5n^2 - 4}{5n^3 + 12n^2 + 13}$; б) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^3 - 2n^2 + 4}{n^2 + 11n}$;

в) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1})$; г) $\lim\limits_{n \to +\infty} (14 - n + 3n^2 - 2n^3)$.

7*. Мотоциклист и велосипедист отправились одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встретились через некоторое время. Если бы они отправились одновременно из тех же пунктов в одном направлении, то, для того чтобы догнать велосипедиста, мотоциклисту потребовалось бы в 2 раза больше времени, чем они потратили до встречи при движении навстречу друг другу. Во сколько раз скорость мотоциклиста больше скорости велосипедиста?

К–3 *III вариант*

1. Найдите значение выражения $\left(a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{2}{3}}\right)^{30}$ при $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

2. Вычислите $\dfrac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{-\frac{1}{3}}}{6^{-\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{3}{2}}}$.

3. Постройте график функции и перечислите свойства этой функции:

   а) $y = 4^x$; б) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

4. Упростите выражение $\left(\dfrac{2}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}} + \dfrac{2}{x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}}\right) : \dfrac{9x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{2}{3}} - y^{-\frac{2}{3}}}$.

5*. Упростите выражение $\left(\dfrac{x + \sqrt[3]{x} + x^{-\frac{1}{3}}}{\left(\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{1}{3}} + 1\right)\left(\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{1}{3}} - 1\right)} + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}$

   и найдите его значение при $x = 0{,}125$.

6*. Вычислите предел последовательности:

   а) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-4n^3 + 2n^2 - 1}{3n^3 + n^2 + 11}$; б) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-3n^4 + 4n}{2n^3 + 5n^2 + 11}$;

   в) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n}\right)$; г) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + 3n + 5n^2 - 7n^3\right)$.

7*. Четыре ученика, работая совместно с одинаковой производительностью, выполнили задание за некоторый срок. Один мастер и один ученик, работая совместно, выполнили бы это задание за $\frac{4}{3}$ того же срока. Во сколько раз производительность мастера больше производительности ученика?

К–3 *IV вариант*

1. Найдите значение выражения $\left(a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{2}}\right)^{20}$ при $a = \left(\frac{3}{10}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

2. Вычислите $\dfrac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 6^{-\frac{1}{2}}}{9^{-\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{5}{6}}}$.

3. Постройте график функции и перечислите свойства этой функции:

   а) $y = 5^x$; б) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

4. Упростите выражение $\left(\dfrac{3}{x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}} - \dfrac{3}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}}\right) : \dfrac{2x^{-\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{2}{3}} - y^{-\frac{2}{3}}}$.

5*. Упростите выражение $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x} + x^{-\frac{1}{4}}}{\left(\sqrt[4]{x} + x^{-\frac{1}{4}} + 1\right)\left(\sqrt[4]{x} + x^{-\frac{1}{4}} - 1\right)} + \sqrt[4]{x}\right)^{-4}$

   и найдите его значение при $x = 0{,}0125$.

6*. Вычислите предел последовательности:

   а) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-3n^3 + n^2 - 2}{4n^3 - 10n^2 + 3}$; б) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^4 + 3n^2 + 4n}{-2n^2 + 10}$;

   в) $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt[3]{3n} - \sqrt[3]{3n - 1})$; г) $\lim\limits_{n \to +\infty} (5 - 7n + 3n^2 - 2n^3)$.

7*. На четырех старых станках, работающих совместно с одинаковой производительностью, выполнили задание за некоторый срок. На одном новом и одном старом станках, работающих совместно, выполнили бы это задание за 0,8 того же срока. Во сколько раз производительность нового станка больше производительности старого станка?

К–4 *I вариант*

1. Вычислите:

   а) $\log_2 32 + \ln e - \lg 100$;

   б) $\dfrac{\left(\log_2(\sqrt{5} - 1) + \log_2(\sqrt{5} + 1)\right) \log_3 49}{\log_3 7}$.

2. Решите уравнение:

а) $\left(\frac{1}{9}\right)^x + 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 9 = 0$; б) $\log_3 x + 4\log_9 x = 9$.

3. Решите неравенство:

а) $2^{x+3} - 3 \cdot 2^{x+1} + 2^x < 12$;

б) $(\log_{0,5} x)^2 - 3\log_{0,5} x - 4 \leqslant 0$.

4*. Докажите числовое равенство

$$\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3(\sqrt{5}-2)^2} + \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2(\sqrt{5}-3)^2} = 1.$$

5*. Вычислите значение числового выражения

$$5^{\log_8 27} : 3^{\log_2 5}.$$

6*. Решите уравнение $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 1 = 0$.

7*. Проехав за 1 ч три четверти расстояния между городами A и B, водитель увеличил скорость на 20 км/ч, поэтому остаток пути он проехал за 15 мин. Определите расстояние между городами A и B.

К–4 *II вариант*

1. Вычислите:

а) $\log_3 81 - \ln e + \lg 1000$;

б) $\dfrac{2 \cdot \log_7 16}{\left(\log_3(\sqrt{10}+1) + \log_3(\sqrt{10}-1)\right)\log_7 2}$.

2. Решите уравнение:

а) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$; б) $\log_2 x + 6\log_4 x = 8$.

3. Решите неравенство:

а) $3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x+1} + 3^x < 12$;

б) $(\log_{0,5} x)^2 + 3\log_{0,5} x - 4 \leqslant 0$.

4*. Докажите числовое равенство

$$\left(\sqrt{5}\right)^{\log_5(\sqrt{2}-1)^2} + \left(\sqrt{3}\right)^{\log_3(\sqrt{2}-2)^2} = 1.$$

5*. Вычислите значение числового выражения

$$7^{\log_{27} 8} : 2^{\log_3 7}.$$

6*. Решите уравнение $5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} - 9 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{x} + 3 = 0.$

7*. Проехав за 2 ч две трети расстояния между городами A и B, водитель уменьшил скорость на 15 км/ч, поэтому остаток пути он проехал за 1 ч 20 мин. Определите расстояние между городами A и B.

К—4 *III вариант*

1. Вычислите:

а) $\lg 0{,}01 - \log_2 \frac{1}{4} + \ln e^3$;

б) $\dfrac{\left(25^{\log_5(\sqrt{3}-1)} + 9^{\log_3(\sqrt{3}+1)}\right) \log_3 5}{\log_3 625}$.

2. Решите уравнение:

а) $8 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{x} - 30 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x} + 27 = 0$;

б) $\log_2 x + 6\log_4 x + 9\log_8 x = 14$.

3. Решите неравенство:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x} < 7$;

б) $(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 3 \leqslant 0$.

4*. Докажите числовое равенство

$$\log_9(6\sqrt{6} - 15)^2 + \log_{27}(6\sqrt{6} + 15)^3 = 2.$$

5*. Вычислите значение числового выражения

$$\left(\sqrt{5}\right)^{\log_2 3} : \left(\sqrt{3}\right)^{\log_2 5}.$$

6*. Решите уравнение $(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x - 2 = 0$.

7.* Некоторое число деталей токарь должен обточить к намеченному сроку. За 6 ч он выполнил три четверти задания, а остальные детали обточил его ученик, который обтачивал на 6 деталей в час меньше, чем токарь. В результате задание было выполнено на 1 ч 20 мин позже намеченного срока. Сколько деталей обточили токарь и его ученик вместе?

К–4 *IV вариант*

1. Вычислите:

   а) $\lg 0{,}1 - \log_3 \frac{1}{9} + \ln e^4$;

   б) $\frac{\left(16^{\log_4(\sqrt{5}-1)} + 9^{\log_3(\sqrt{5}+1)}\right)\log_3 4}{\log_3 64}$.

2. Решите уравнение:

   а) $27 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 30 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 8 = 0$;

   б) $\log_3 x + 4\log_9 x + 6\log_{27} x = 10$.

3. Решите неравенство:

   а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^x < 3$;

   б) $(\log_3 x)^2 + 2\log_3 x - 3 \leqslant 0$.

4*. Докажите числовое равенство

$$\log_4(4\sqrt{6} - 10)^2 + \log_8(4\sqrt{6} + 10)^3 = 2.$$

5*. Вычислите значение числового выражения

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\log_5 3} : \left(\sqrt{3}\right)^{\log_5 2}.$$

6*. Решите уравнение $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x - 2 = 0$.

7*. Некоторое число деталей токарь должен обточить к намеченному сроку. За 4 ч он выполнил две трети задания, а остальные детали обточил его ученик, который обтачивал на 5 деталей в час меньше, чем токарь. В результате задание было выполнено на 1 ч 15 мин позже намеченного срока. Сколько деталей обточили токарь и его ученик вместе?

К–5 *I вариант*

1. Вычислите:
   а) $\sqrt{3}\sin 60° + \cos 60° \sin 30° - \operatorname{tg} 45° \operatorname{ctg} 135° + \operatorname{ctg} 90°$;
   б) $\cos\frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} + \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$.
2. Упростите выражение:
   а) $\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}$, $\alpha \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
   б) $\sin(2\pi+\alpha) + \cos(\pi+\alpha) + \sin(-\alpha) + \cos(-\alpha)$.
3. Вычислите:
   а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha$;
   б) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}4$.
4. Найдите все такие углы α, для каждого из которых выполняется равенство:
   а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
   в) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = -1$.

5*. Вычислите:
   а) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$;
   б) $\frac{3\sin\alpha - 4\cos\alpha}{5\sin\alpha + 6\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

6*. Вычислите $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arccos 0 + \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{3}}{\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

7*. В прошлом году в городской думе заседали 50 депутатов от двух партий и 5 независимых депутатов. После выборов в этом году общее число депутатов не изменилось, но число депутатов первой партии увеличилось на 10%, число депутатов второй партии уменьшилось на 10%, число независимых депутатов увеличилось на 1. Сколько депутатов от каждой из этих партий избрано в городскую думу в этом году?

К–5 *II вариант*

1. Вычислите:
   а) $\sqrt{2}\sin 45° - \cos 30° \sin 60° + \operatorname{ctg} 45° \operatorname{tg} 135° - \operatorname{tg} 0°$;
   б) $\sin\frac{\pi}{3} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - \sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\sin(\pi+\alpha)+\cos(2\pi+\alpha)-\sin(-\alpha)-\cos(-\alpha)$.

3. Вычислите:

а) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+2\sin\alpha\cos\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha\cos\alpha = 0,2$.

4. Найдите все такие углы α, для каждого из которых выполняется равенство:

а) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$.

5*. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha = -3$;

б) $\frac{6\sin\alpha+5\cos\alpha}{4\sin\alpha-3\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

6*. Вычислите $\arcsin 0-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}}{\operatorname{arcctg}\sqrt{3}}$.

7*. В пансионате в прошлом году отдыхали 700 мужчин и женщин и 100 детей. В этом году число мужчин уменьшилось на 10 %, а число женщин увеличилось на 10%, число детей увеличилось на 10. В результате общее число отдыхающих не изменилось. Сколько мужчин и сколько женщин отдыхало в пансионате в этом году?

К–5 *III вариант*

1. Вычислите:

а) $\sin 30°+\sqrt{6}\cos 45°\sin 60°-\operatorname{tg}30°\operatorname{ctg}150°+\operatorname{ctg}45°$;

б) $\cos\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{4}+\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{\sin^2(-\alpha)}$, $\alpha \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\sin(3\pi+\alpha)+\cos(\pi-\alpha)-\sin(-\alpha)+\cos(-\alpha)$.

3. Вычислите:

а) $(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha\cos\alpha=0,3$.

4. Найдите все такие углы α, для каждого из которых выполняется равенство:

а) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha=-\sqrt{3}$.

5*. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=4$;

б) $1-\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$, если $\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{1}{3}$.

6*. Вычислите $\arcsin 1-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})}$.

7*. Некоторое расстояние планировали проехать с постоянной скоростью, а проехали расстояние на 40% большее и со скоростью на 60% большей. На сколько процентов время движения оказалось меньше запланированного?

К—5 *IV вариант*

1. Вычислите:

а) $\cos 60°-\sqrt{6}\cos 30°\sin 45°+\operatorname{ctg}30°\operatorname{tg}150°-\operatorname{tg}45°$;

б) $\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{4}-\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$.

2. Упростите выражение:

а) $\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\cos^2(-\alpha)}$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$;

б) $\sin(\pi-\alpha)+\cos(3\pi+\alpha)+\sin(-\alpha)+\cos(-\alpha)$.

3. Вычислите:

а) $(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^2+4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha\cos\alpha=0,6$.

4. Найдите все такие углы α, для каждого из которых выполняется равенство:

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$.

5*. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = -4$;

б) $1 + \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$, если $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{1}{3}$.

6*. Вычислите $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arccos 1 + \frac{\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})}{\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$.

7*. Некоторое расстояние планировали проехать с постоянной скоростью, а проехали расстояние на 40% большее и со скоростью на 75% большей. На сколько процентов время движения оказалось меньше запланированного?

К–6 *I вариант*

1. Упростите выражение:

а) $\cos(\alpha + \beta) + 2\sin\alpha\sin\beta$, если $\alpha - \beta = \pi$;

б) $\sin^2\alpha + \frac{\sin(\pi - \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$, $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. Вычислите $\sin 2004^\circ \cos 1974^\circ - \sin 1974^\circ \cos 2004^\circ$.

3. Известно, что $\sin\alpha = 0{,}8$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Вычислите: а) $\cos\alpha$; б) $\sin 2\alpha$; в) $\cos 2\alpha$.

4. Постройте график функции

$$y = \cos 7x \cos 6x + \sin 7x \sin 6x.$$

5*. Вычислите $\cos 5° - 2\sin 25° \sin 20°$.

6*. Докажите справедливость равенства

$$\cos 44° \cos 16° - \cos 59° \cos 31° = \frac{1}{4}.$$

7*. Пешеход вышел из города A в город B. Через час после этого навстречу ему выехал велосипедист из города B в город A. Через 2 ч после своего выезда велосипедист встретился с пешеходом, а через 1 ч после встречи прибыл в город A. Сколько времени был в пути пешеход?

К—6 II вариант

1. Упростите выражение:

а) $\sin(\alpha - \beta) + 2\sin\beta\cos\alpha$, если $\alpha + \beta = \pi$;

б) $\cos^2\alpha + \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos(\pi - \alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. Вычислите $\cos 2005° \cos 1960° + \sin 1960° \sin 2005°$.

3. Известно, что $\cos\alpha = -0{,}6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Вычислите: а) $\sin\alpha$; б) $\sin 2\alpha$; в) $\cos 2\alpha$.

4. Постройте график функции

$$y = \sin 7x \cos 6x - \sin 6x \cos 7x.$$

5*. Вычислите $\sin 10° + 2\sin 25° \cos 35°$.

6*. Докажите справедливость равенства

$$\sin 51° \cos 39° - \sin 21° \cos 9° = \frac{1}{4}.$$

7*. Велосипедист выехал из города A в город B. Через час после этого навстречу ему выехал мотоциклист из города B в город A. Через час после своего выезда мотоциклист встретился с велосипедистом, а через 0,5 ч после встречи прибыл в город A. Сколько времени был в пути велосипедист?

К–6 *III вариант*

1. Упростите выражение:

а) $\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\sin\beta$, если $\alpha + \beta = \pi$;

б) $\cos^2\alpha - \dfrac{\cos(\pi - \alpha)\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. Вычислите $(\sin 68° + \cos 38°)^2 + (\sin 38° - \cos 68°)^2$.

3. Известно, что $\cos\alpha = -\dfrac{5}{13}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

Вычислите: а) $\sin\alpha$; б) $\sin 2\alpha$; в) $\cos 2\alpha$.

4. Постройте график функции

$$y = \frac{\sin 3x\cos 2x - \sin 2x\cos 3x}{\cos 3x\cos 2x + \sin 3x\sin 2x}.$$

5*. Вычислите $2\cos 37°\cos 23° - \sin 76°$.

6*. Докажите справедливость равенства

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}.$$

7*. Велосипедист и мотоциклист одновременно отправились навстречу друг другу из городов A и B. После встречи мотоциклист прибыл в город B через 1 ч, а велосипедист прибыл в город A через 9 ч. Во сколько раз скорость мотоциклиста больше скорости велосипедиста?

К–6 *IV вариант*

1. Упростите выражение:

а) $\sin(\alpha + \beta) - 2\sin\beta\cos\alpha$, если $\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2}$;

б) $\sin^2\alpha - \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. Вычислите $(\cos 32° + \cos 28°)^2 + (\sin 32° - \sin 28°)^2$.

3. Известно, что $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Вычислите: а) $\cos\alpha$; б) $\sin 2\alpha$; в) $\cos 2\alpha$.

4. Постройте график функции

$$y = \frac{\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x}{\sin 4x \cos 3x - \sin 3x \cos 4x}.$$

5*. Вычислите $2\sin 34° \sin 26° - \sin 82°$.

6*. Докажите справедливость равенства

$$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}.$$

7*. Велосипедист и пешеход одновременно отправились навстречу друг другу из городов A и B. После встречи велосипедист прибыл в город B через 1 ч, а пешеход пришел в город A через 4 ч. Во сколько раз скорость велосипедиста больше скорости пешехода?

К—7 *I вариант*

Решите уравнение (1—5).

1. а) $\cos x = -1$; б) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

2. а) $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$; б) $3\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$.

3. а) $\sin x - \cos x = 0$;
б) $3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.

4*. а) $\sin x = -0{,}5$; б) $\cos x = \frac{1}{3}$; в) $\operatorname{tg} x = -3$.

5*. а) $\sin x + \cos x = 1$; б) $2\cos^2 x + \sin 4x = 1$.

6*. Решите неравенство:
а) $\sin x < 0{,}5$; б) $\cos x > 0{,}5$; в) $\operatorname{tg} x \leqslant -3$.

7*. Из города A в город B вышел пешеход. Через 3 ч после его выхода из города A в город B выехал велосипедист, а еще через час вслед за ним выехал мотоциклист. Все участники двигались равномерно и в какой-то момент времени оказались в одной точке маршрута. Мотоциклист прибыл в город B на 2 ч раньше велосипедиста. Через сколько часов после велосипедиста пешеход пришел в город B?

К–7 *II вариант*

Решите уравнение (1—5).

1. а) $\sin x = -1$; б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

2. а) $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$; б) $3\cos^2 x - 2\sin x + 2 = 0$.

3. а) $\sin x + \cos x = 0$;
   б) $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

4*. а) $\cos x = -0{,}5$; б) $\sin x = \frac{1}{4}$; в) $\operatorname{tg} x = 2$.

5*. а) $\sin x - \cos x = 1$; б) $2\cos^2 x - \sin 4x = 1$.

6*. Решите неравенство:
а) $\sin x > 0{,}5$; б) $\cos x < 0{,}5$; в) $\operatorname{tg} x \geqslant -3$.

7*. Из города A в город B вышел пешеход. Через 3 ч после его выхода из города A в город B выехал велосипедист, а еще через 2 ч вслед за ним выехал мотоциклист. Все участники двигались равномерно и в какой-то момент времени оказались в одной точке маршрута. Велосипедист прибыл в город B на 1 ч раньше пешехода. Через сколько часов после мотоциклиста велосипедист приехал в город B?

К–7 *III вариант*

Решите уравнение (1—5).

1. а) $\cos x = 1$; б) $\sin x = \frac{1}{2}$; в) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. а) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; б) $3\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$.

3. а) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$;
   б) $\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$.

4*. а) $\sin x = -0{,}6$; б) $\cos x = \frac{2}{3}$; в) $\operatorname{tg} x = -4$.

5*. а) $\sin x + \cos x = -1$; б) $\cos 4x - \cos^2 x = 1$.

6*. Решите неравенство:
а) $\sin x > -0{,}5$; б) $\cos x < -0{,}5$; в) $\operatorname{tg} x \geqslant 2$.

7*. Из города A в город B вышел пешеход. Через некоторое время после выхода пешехода из города B в город A выехал велосипедист, а еще через час вслед за ним выехал мотоциклист. Все участники двигались равномерно и встретились в одной точке маршрута. Пешеход пришел в город B через 6 ч после выезда мотоциклиста, а мотоциклист прибыл в город A через 4 ч после выхода пешехода из города A. Через сколько часов после мотоциклиста велосипедист прибыл в город A?

К—7 *IV вариант*

Решите уравнение (1—5).

1. а) $\sin x = 1$; б) $\cos x = \frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. а) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$; б) $3\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$.

3. а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$;
б) $\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$.

4*. а) $\cos x = -0{,}7$; б) $\sin x = \frac{1}{4}$; в) $\operatorname{tg} x = 5$.

5*. а) $\sin x - \cos x = -1$; б) $\cos 4x - \sin^2 x = 1$.

6*. Решите неравенство:
а) $\sin x < -0{,}5$; б) $\cos x > -0{,}5$; в) $\operatorname{tg} x \leqslant 2$.

7*. Из города A в город B вышел пешеход. Через некоторое время после выхода пешехода из города B в город A выехал велосипедист. Через час после выхода пешехода вслед за ним выехал мотоциклист. Все участники двигались равномерно и встретились в одной точке маршрута. Мотоциклист прибыл в город B через 3 ч после выезда из него велосипедиста, но за 2 ч до прибытия пешехода в город B. Через сколько часов после выезда мотоциклиста велосипедист прибыл в город A?

Итоговый тест для самоконтроля

I вариант

ЧАСТЬ I

К каждому из заданий **А1—А13** дано 4 ответа, из которых только один верный. Для каждого задания запишите номер выбранного вами правильного ответа.

А1. Упростите выражение $\sqrt[4]{a} : a^{-\frac{1}{2}}$.

1) $\sqrt[4]{a}$; 2) $\sqrt[4]{a^3}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$.

А2. Упростите выражение $\frac{b^{\frac{2}{5}} - 25}{b^{\frac{1}{5}} + 5} - b^{\frac{1}{5}}$.

1) -5; 2) 5; 3) $b^{\frac{2}{5}}$; 4) $b^{-\frac{2}{5}}$.

А3. Упростите выражение $\log_3 18 - \log_3 2 + 5^{\log_5 2}$.

1) $\log_3 2$; 2) 0; 3) 4; 4) $-\log_3 2$.

А4. Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} > \frac{1}{8}$.

1) $(5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 5)$; 3) $(-\infty; 1)$; 4) $(1; +\infty)$.

А5. Укажите промежуток возрастания функции $y = f(x)$, заданной графиком (рис. 42).

1) $[-3; 0]$; 2) $[-4; 3]$;
3) $[-2; 2]$; 4) $[0; 3]$.

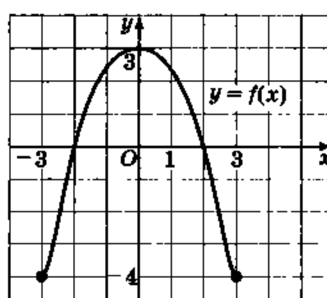

Рис. 42

А6. Упростите выражение

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha - 1.$$

1) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 2) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$;
3) 2; 4) 0.

А7. Решите уравнение $\log_2 x = \frac{1}{2}$.

1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) 4; 4) $\sqrt{2}$.

A8. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_2(x-2)=3$.
1) (10; 13); 2) (9; 13); 3) (5; 7); 4) (7; 9).

A9. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

1) $(-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$;
3) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 4) $(-1; 1]$.

A10. Решите неравенство $9^x \leqslant \dfrac{1}{3}$.

1) $[-0{,}5; +\infty)$; 2) $(-\infty; -0{,}5]$;
3) $[-2; +\infty)$; 4) $(-\infty; -2)$.

A11. Решите неравенство $2^{x+2}+2^x>20$.
1) $(-\infty; 2)$; 2) $(-\infty; 2]$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $[2; +\infty)$.

A12. Найдите произведение корней уравнения

$$\lg^2 x - 3\lg x - 10 = 0.$$

1) 10; 2) –10; 3) $\dfrac{1}{1000}$; 4) 1000.

A13. Решите уравнение $2\cos^2 x - 3\sin x = 0$.

1) $(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^{m}\cdot\dfrac{\pi}{6}+2\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}$;

3) $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}$; 4) $(-1)^{m}\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}$.

ЧАСТЬ II

К каждому из заданий **B1—B7** укажите полученный вами ответ (только число).

B1. Найдите сумму корней уравнения $\dfrac{1}{6\cdot 2^x-11}=\dfrac{1}{4^x-3}$.

B2. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}100-\log_{0,3}9}<1.$$

B3. Вычислите $(\sqrt[6]{7}-\sqrt[6]{2})(\sqrt[6]{7}+\sqrt[6]{2})\left((\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{14}\right)$.

B4. Сколько корней уравнения $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ принадлежит отрезку $[-\pi; 2\pi]$?

B5. На соревнованиях по кольцевой трассе первый лыжник проходил круг на 2 мин быстрее второго и через час обогнал его на целый круг. За сколько минут первый лыжник проходил один круг?

B6. Вычислите $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

B7. Найдите значение выражения $\frac{1 + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

II вариант

ЧАСТЬ I

К каждому из заданий **А1—А13** дано 4 ответа, из которых только один верный. Для каждого задания запишите номер выбранного вами правильного ответа.

А1. Упростите выражение $\sqrt[3]{b} : b^{-\frac{1}{6}}$.

1) $\frac{1}{\sqrt{b}}$; 2) $\sqrt[6]{b}$; 3) $\sqrt{b}$; 4) $\frac{1}{\sqrt[6]{b}}$.

А2. Упростите выражение $\frac{a^{\frac{2}{3}} - 4}{a^{\frac{1}{3}} - 2} - a^{\frac{1}{3}}$.

1) -2; 2) $a^{\frac{2}{3}}$; 3) 2; 4) $a^{-\frac{2}{3}}$.

А3. Упростите выражение $\log_4 48 - \log_4 3 + 6^{\log_6 5}$.

1) 9; 2) 7; 3) $\log_4 3$; 4) $-\log_4 3$.

А4. Решите неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} < \frac{1}{9}$.

1) $(-\infty; 5)$; 2) $(-1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1)$; 4) $(5; +\infty)$.

А5. Укажите промежуток возрастания функции $y = f(x)$, заданной графиком (рис. 43).

1) $[-3; 0]$; 2) $[-2; 2]$;
3) $[-4; 4]$; 4) $[0; 3]$.

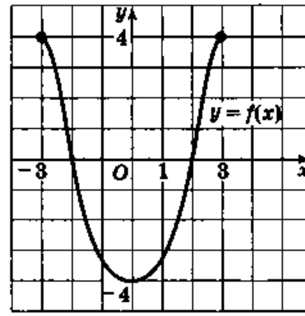

Рис. 43

А6. Упростите выражение

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha - 1.$$

1) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 2) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

3) 0; 4) 2.

А7. Решите уравнение $\log_5 x = -1$.

1) $\sqrt{5}$; 2) $\frac{1}{5}$; 3) 25; 4) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

А8. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_3(x+1) = 2$.

1) $(7; 9)$; 2) $(9; 11)$; 3) $(4; 7)$; 4) $(6; 8)$.

А9. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

1) $(-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;
3) $(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$; 4) $[-1; 1)$.

А10. Решите неравенство $4^x \geqslant 8$.

1) $[1{,}5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1{,}5]$;
3) $[6; +\infty)$; 4) $(-\infty; 6]$.

А11. Решите неравенство $3^{x+2} - 3^x < 24$.

1) $(-\infty; -1)$; 2) $(-\infty; 1)$; 3) $(-1; +\infty)$; 4) $(1; +\infty)$.

А12. Найдите произведение корней уравнения

$$\lg^2 x + \lg x - 12 = 0.$$

1) -10; 2) 12; 3) -12; 4) $\frac{1}{10}$.

А13. Решите уравнение $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$.

1) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z$; 2) $(-1)^m \cdot \frac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in Z$;

3) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z$; 4) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi m,\ m \in Z$.

ЧАСТЬ II

К каждому из заданий **В1—В7** укажите полученный вами ответ (только число).

В1. Найдите сумму корней уравнения $\frac{1}{5 \cdot 2^x - 9} = \frac{1}{4^x - 5}$.

В2. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{\log_{0,2}(x + 1{,}5)}{\log_{0,2} 100 - \log_{0,2} 4} < 1.$$

В3. Вычислите $\frac{\left((\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})^2 + 4\sqrt[3]{10}\right)\left((\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{10}\right)}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}}$.

В4. Сколько корней уравнения $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}$ принадлежит отрезку $[-2\pi; 2\pi]$?

В5. На соревнованиях по кольцевой трассе первый велосипедист проходил круг на 5 мин медленнее второго и через час отстал от него на целый круг. За сколько минут второй велосипедист проходил один круг?

В6. Вычислите $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

В7. Найдите значение выражения $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos\alpha - \sin(2\pi - \alpha)}$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$.

Ответы к контрольным работам

К—1. **I вар.** **1.** 5. **2.** −12. **3.** а) $(-\infty; -2) \cup (2; 3)$; б) $(-\infty; -2) \cup \{5\} \cup (6; +\infty)$. **4.** а) $\frac{2}{n+3}$; б) 1. **6.** −2; 2. **7.** 37. **II вар.** **1.** 4. **2.** −11. **3.** а) $(-\infty; -3) \cup (2; 4)$; б) $(-\infty; -2) \cup \{4\} \cup (5; +\infty)$. **4.** а) $\frac{2}{n(n-2)}$; б) $\frac{2}{3}$. **6.** −3; 3. **7.** 92. **III вар.** **1.** $\frac{1}{3}$. **2.** −14. **3.** а) $(-\infty; -3) \cup (-1; 2)$; б) $(-\infty; -4) \cup \{2\} \cup (5; +\infty)$. **4.** а) $\frac{2}{n+2}$; б) $\frac{1}{2}$. **6.** 1; −3. **7.** 679. **IV вар.** **1.** $\frac{1}{2}$. **2.** −12. **3.** а) $(-\infty; -4) \cup (-1; 1)$; б) $(-\infty; -1) \cup \{3\} \cup (5; +\infty)$. **4.** а) $\frac{2}{(n-3)(n+1)}$; б) $-\frac{2}{3}$. **6.** −1; 3. **7.** 679.

К—2. **I вар.** **1.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **2.** а) $\frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$; б) $\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1$; в) $\sqrt[3]{4}-1$. **3.** а) 25; б) 1000. **4.** $a-b$. **5.** 0. **6.** 2. **7.** 15 мин. **II вар.** **1.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **2.** а) $\frac{5\sqrt[3]{9}}{3}$; б) $2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}$; в) $\sqrt[3]{5}+1$. **3.** а) 25; б) 1000. **4.** $x-y$. **5.** 0. **6.** 3. **7.** 45 мин. **III вар.** **1.** а) Да; б) да; в) нет; г) нет. **2.** а) $\frac{5\sqrt[3]{2}}{2}$; б) $\frac{6-\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{6}}{7}$; в) $\frac{\sqrt[3]{7}-1}{2}$. **3.** а) 50; б) 1812. **4.** $a-b$. **5.** 0. **6.** 5. **7.** В 2 раза. **IV вар.** **1.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **2.** а) $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$; б) $\frac{7+\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}}{6}$; в) $\frac{5(\sqrt[3]{6}+1)}{7}$. **3.** а) 40; б) 2002. **4.** $x-y$. **5.** 0. **6.** 3. **7.** В 3 раза.

К—3. **I вар.** **1.** $\frac{1}{9}$. **2.** $\frac{9}{4}$. **4.** $-\frac{2}{3}$. **5.** 0,027. **6.** а) $\frac{5}{3}$; б) 0; в) 0; г) $-\infty$. **7.** В 1,5 раза. **II вар.** **1.** $\frac{9}{16}$. **2.** $\frac{8}{9}$. **4.** 1,5. **5.** $\frac{27}{8}$. **6.** а) $\frac{4}{5}$; б) $+\infty$; в) 0; г) $-\infty$. **7.** В 3 раза. **III вар.** **1.** $\frac{1}{4}$. **2.** $\frac{1}{4}$. **4.** $-\frac{4}{9}$. **5.** 1. **6.** а) $-\frac{4}{3}$; б) $-\infty$; в) 0; г) $-\infty$. **7.** В 2 раза. **IV вар.** **1.** 0,09. **2.** $\frac{2}{3}$. **4.** −3. **5.** 5. **6.** а) $-\frac{3}{4}$; б) $-\infty$; в) 0; г) $-\infty$. **7.** В 4 раза.

К—4. **I вар.** **1.** а) 4; б) 4. **2.** а) 0; б) 27. **3.** а) $(-\infty; 2)$; б) $\left[\frac{1}{16}; 2\right]$. **5.** 1. **6.** 0. **7.** 80 км. **II вар.** **1.** а) 6; б) 4. **2.** а) 0; 1; б) 4. **3.** а) $(-\infty; 1)$; б) $\left[\frac{1}{2}; 16\right]$. **5.** 1. **6.** 0. **7.** 180 км. **III вар.** **1.** а) 3; б) 2. **2.** а) 1; 2; б) 4. **3.** а) $(-2; +\infty)$; б) $[0,5; 8]$. **5.** 1. **6.** 0. **7.** 120 деталей. **IV вар.** **1.** а) 5; б) 4. **2.** а) 1; 2; б) 9. **3.** а) $(-2; +\infty)$; б) $\left[\frac{1}{27}; 3\right]$. **5.** 1. **6.** 0. **7.** 78 деталей.

К–5. I вар. 1. а) $\frac{11}{4}$; б) $2+\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2. а) $\sin\alpha$; б) 0. 3. а) 1; б) 2,5. 4. а) $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 5. а) 7; б) $\frac{13}{9}$. 6. $1-\frac{\pi}{4}$. 7. 22 и 27 депутатов. **II вар.** 1. а) $-\frac{3}{4}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}-2$. 2. а) $\cos\alpha$; б) 0. 3. а) 1; б) 5. 4. а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 5. а) 11; б) $\frac{23}{9}$. 6. $-1-\frac{\pi}{4}$. 7. 360 мужчин и 330 женщин. **III вар.** 1. а) 4; б) 2,5. 2. а) 1; б) 0. 3. а) 1; б) $\frac{10}{3}$. 4. а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; в) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 5. а) 14; б) $\frac{1}{9}$. 6. $\frac{\pi}{3}+\frac{1}{5}$. 7. На 12,5%. **IV вар.** 1. а) -3; б) $-1,5$. 2. а) 1; б) 0. 3. а) 1; б) $\frac{5}{3}$. 4. а) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; г) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 5. а) 18; б) $\frac{1}{9}$. 6. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$. 7. На 20%.

К–6. I вар. 1. а) -1; б) 1. 2. 0,5. 3. а) $-0{,}6$; б) $-0{,}96$; в) $-0{,}28$. 5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 7. 9 ч. **II вар.** 1. а) 0; б) 1. 2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. а) 0,8; б) $-0{,}96$; в) $-0{,}28$. 5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 7. 6 ч. **III вар.** 1. а) -1; б) 1. 2. 3. 3. а) $-\frac{12}{13}$; б) $\frac{120}{169}$; в) $-\frac{119}{169}$. 5. $\frac{1}{2}$. 7. В 3 раза. **IV вар.** 1. а) 1; б) 1. 2. 3. 3. а) $\frac{5}{13}$; б) $-\frac{120}{169}$; в) $-\frac{119}{169}$. 5. $-\frac{1}{2}$. 7. В 2 раза.

К–7. I вар. 1. а) $\pi+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; в) $\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 2. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 3. а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 4. а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; в) $\operatorname{arctg}(-3)+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 5. а) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $-\frac{\pi}{12}+\pi n$, $-\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 6. а) $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{13\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; в) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \operatorname{arctg}(-3)+\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 7. Через 6 ч. **II вар.** 1. а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; б) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$;

в) $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **2.** а) $\pi+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **3.** а) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **4.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; в) $\operatorname{arctg}2+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **5.** а) $\pi+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{12}+\pi n$, $\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **6.** а) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; в) $\left[\operatorname{arctg}(-3)+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **7.** Через $\frac{2}{3}$ ч.

III вар. 1. а) $2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **2.** а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **3.** а) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **4.** а) $(-1)^{n+1}\arcsin 0{,}6+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\pm\arccos\frac{2}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; в) $-\operatorname{arctg}4+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **5.** а) $-\pi+2\pi n$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **6.** а) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; в) $\left[\operatorname{arctg}2+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **7.** Через $\frac{2}{3}$ ч.

IV вар. 1. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; в) $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **2.** а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **3.** а) $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **4.** а) $\pm\arccos(-0{,}7)+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; в) $\operatorname{arctg}5+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **5.** а) $2\pi n$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) πn, $n\in \boldsymbol{Z}$. **6.** а) $\left(-\frac{5\pi}{6}+2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; в) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \operatorname{arctg}2+\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **7.** Через 1,5 ч.

Ответы к итоговому тесту

I вариант

Номер задания	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13
Номер верного ответа	2	1	3	2	1	4	4	2	1	2	3	4	4

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
Верный ответ	3	10	5	1	10	1	–1

II вариант

Номер задания	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13
Номер верного ответа	3	3	2	4	4	3	2	1	3	1	2	4	1

Номер задания	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
Верный ответ	2	23	7	2	15	0	–1

Оглавление

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Потапов Михаил Константинович
Шевкин Александр Владимирович

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Дидактические материалы

10 класс

Базовый и профильный уровни

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художники *П. С. Барбаринский, О. П. Богомолова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технический редактор *С. В. Щербакова*
Корректоры *Л. С. Александрова, М. А. Терентьева*
Компьютерная графика *К. В. Солоненко*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 27.09.10. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 6,12. Тираж 15 000 экз. Заказ № 30779.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.
www.sarpk.ru